

Exercise for Analysis of Algorithms

Exercise 24

Let $r \in \mathbf{R}$, $r \notin \{1, 2, 3, \dots\}$ and $n \in \mathbf{N}$. Find a closed formula for the binomial coefficient

$$\binom{r}{n} = \frac{r^n}{n!}$$

as a function of n that is correct *up to a constant factor* if r is a fixed constant.

Exercise 25

Find a bivariate generating function and a closed-form expression for the number of bitstrings of length n that contain exactly m ones and do not contain the substring 11.

Solution:

The bitstrings which do not contain 11 as substring are generated can be described by the recursive definition $F = 0F + 10F + \varepsilon + 1$. We get the following generating function:

$$\begin{aligned} F(z) &= zF(z) + uz^2F(z) + 1 + uz \\ &= \frac{1 + uz}{1 - z - uz^2} \\ &= (1 + uz) \sum_{k \geq 0} z^k (1 + uz)^k \\ &= (1 + uz) \sum_{k \geq 0} z^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} u^i z^i \\ &= (1 + uz) \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} u^i z^{i+k} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} u^i z^{i+k} + \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} u^{i+1} z^{i+k+1} \end{aligned}$$

We are interested in the coefficients corresponding to $z^n u^m$. Thus we need to consider the summand with $i = m \wedge i + k = n$ (front) and $i + 1 = m \wedge i + k + 1 = n$ (back). This gives the closed formula for the number of valid bitstrings:

$$\binom{n-m}{m} + \binom{n-m}{m-1} = \binom{n-m+1}{m}$$

Exercise 26

Solve this recurrence:

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + 3f_{n-3} + \dots + nf_0 \text{ for } n > 0 \text{ and } f_0 = 1.$$

Solution:

Wir müssen zunächst eine Form der Rekursionsgleichung finden, die für alle n (mit der Annahme, daß $f_n = 0$ für $n < 0$) gilt. Dafür muß im Fall $n = 0$ eine 1 addiert werden. Die Gleichung lautet jetzt also

$$f_n = (n = 0) + \sum_{i=1}^n i f_{n-i}.$$

Dies können wir für alle n mit z^n multiplizieren und aufaddieren, so daß wir insgesamt

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((n = 0) + \sum_{i=1}^n i f_{n-i}) z^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n i f_{n-i} z^n$$

erhalten. Der rechte Term erinnert uns natürlich sofort an die Faltungsregel, und wir schreiben das Ganze als

$$F(z) = \frac{zF(z)}{(1-z)^2} + 1$$

mit der Reihe aus Tutoraufgabe 11. Auflösen nach F liefert $F(z) = \frac{(1-z)^2}{z^2-3z+1}$.

Anhand der Partialbruchzerlegung von $F(z)$, welche da lautet

$$F(z) = \frac{(1-z)^2}{z^2-3z+1} = \frac{1}{1-\frac{2}{3-\sqrt{5}}z} + \frac{1}{1-\frac{2}{3+\sqrt{5}}z},$$

können wir mit Hilfe der geometrischen Reihe direkt ablesen:

$$[z^n]F(z) = \left(\frac{2}{3-\sqrt{5}}\right)^n + \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n.$$