Ausgewählte Anwendungen des Lovasz Local Lemmas

Anca Ivanescu

28. Januar 2007

Zusammenfassung

Das Lovasz Local Lemma (LLL) ist eine der wichtigsten probabilistischen Methoden. Es wird angewendet um zu beweisen, dass bestimmte Ereignisse mit einer positiven Wahrscheinlichkeit eintreten können.[7] Da diese Wahrscheinlichkeit oft sehr klein ist, liefert das LLL keine effizienten Algorithmen. J.Beck hat als erster eine Methode entwickelt, um aus dem Existenzbeweis der LLL einen Polynomialzeitalgorithmus zu erhalten.[3] In dieser Arbeit wird das LLL präsentiert und an einem Beispiel angewendet. Weiterhin wird Becks Methode anhand des Problems der 2-Färbbarkeit von Hypergraphen beschrieben und anschließend eine Verfeinerung dieser Methode vorgestellt.

1 Einleitung

Probabilistische Methoden bieten die Möglichkeit, die Existenz von Objekten mit gewissen Eigenschaften zu beweisen, indem für ein zufälliges Objekt aus einer passenden Wahrscheinlichkeitsverteilung, gezeigt wird, dass es mit einer positiven Wahrscheinlichkeit auftreten kann. Bei vielen Anwendungen kann man feststellen, dass diese Wahrscheinlichkeit sehr hoch ist. In diesen Fällen liefert der Beweis auch einen effizienten randomisierten Algorithmus, um dieses Objekt aufzubauen. [1]

Bei einigen Anwendungen kann man die Existenz seltener kombinatorischer Strukturen beweisen. Diese Strukturen treten mit einer positiven, jedoch sehr kleinen, Wahrscheinlichkeit auf. In diesen Fällen liefert der Beweis keinen effizienten, randomisierten oder deterministischen Algorithmus. [3]

Eines der wichtigsten Verfahren dieser Art ist das Lovasz Local Lemma (LLL), ein Verfahren um die Existenz seltener Objekte zu beweisen.[7] Beck entwickelte als erster eine Methode, um einige dieser Existenzbeweise in Polynomialzeitalgorithmen umzuformen. Allerdings kann diese Methode nur auf die einfache, symmetrische Variante des LLL angewendet werden.[3]

In dieser Arbeit wird das LLL zusammen mit seinem Korollar und seiner symmetrischen Form vorgestellt. Um die Stärke des LLL zu zeigen, wird die Existenz eines kantendisjunkten Pfades in einem Netzwerk mit Hilfe des Korollars bewiesen. Weiterhin wird Becks Algorithmus vorgestellt, und zwar anhand des

Problems der 2-Färbbarkeit von Hypergraphen. Anschließend wird das *Lopsided LLL* vorgestellt, das die Einschränkungen des LLL entspannt.

2 Das Lovasz Local Lemma

Sei A eine Menge von Ereignissen $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ mit $Pr[A_i] = \frac{1}{2}$. Falls $A_1, A_2, ..., A_n$ gegenseitig unabhängig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines dieser Ereignisse eintritt

$$Pr[\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}] = \frac{1}{2^n}$$

Das Lovasz Local Lemma verallgemeinert die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit für den Fall, in dem die gegenseitige Unabhängigkeit der Ereignisse limitiert ist, d.h. A_i gegenseitig unabhängig zu $A \backslash (A_i \cup D_i)$ für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ ist, wobei $D_i \subseteq A$. [8]

Ein Abhängigkeitsgraph für die Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$ ist ein Graph G=(V,E) mit der Knotenmenge V=$\{1, ..., n\}$ und die Kantenmenge E. Falls A_i und A_j voneinander abhängige Ereignisse sind, so ist $(i, j) \in E$. [6]

Lovasz Local Lemma. *Seien $A_1, A_2, ..., A_n$ Ereignisse eines Wahrscheinlichkeitsraumes und $G = (V, E)$ ein Abhängigkeitsgraph für diese Ereignisse. Angenommen es gibt reelle Zahlen $\{x_1, ..., x_n\} \in [0, 1]$ so dass für alle $i \in \{1, ..., n\}$ folgendes gilt:*[6]

$$Pr[A_i] \leq x_i \prod_{(i,j) \in E} (1 - x_j)$$

dann gilt:

$$Pr[\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}] \geq \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \tag{1}$$

Beweis. Sei S eine Untermenge der Indizes $\{1, ..., n\}$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach $k = |S|$. Es genügt zu zeigen, dass für jedes i gilt [8]:

$$Pr[A_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{A_j}] \leq x_i \tag{2}$$

weil dann folgendes gilt:

$$Pr[\bigcap_{i=0}^{n} \overline{A_i}] = \prod_{i=1}^{n} Pr[\overline{A_i} \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j}] \geq \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$$

Für $S = \emptyset$, also $k = 0$, gilt die Gleichung 2 [6]:

$$Pr[A_i] \leq x_i \prod_{(i,j) \in E} (1 - x_j) \leq x_i$$

Zum Induktionsschritt sei jetzt $S_1 = \{j \in S \mid (i,j) \in E\}$ und $S_2 = S \backslash S_1$. Falls $S_2 = S$, so ist A_i unbhängig von allen Ereignissen in S [8]:

$$Pr[A_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{A_j}] = Pr[A_i] \leq x_i$$

Wir setzen den Beweis fort, für den Fall $|S_2| < k$. Nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt [6]:

$$\begin{aligned} Pr[A_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{A_j}] &= \frac{Pr[A_i \cap \bigcap_{j \in S} \overline{A_j}]}{Pr[\bigcap_{j \in S} \overline{A_j}]} \\ &= \frac{Pr[A_i \cap \bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j} \mid \bigcap_{m \in S_2} \overline{A_m}] Pr[\bigcap_{m \in S_2} \overline{A_m}]}{Pr[\bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j} \mid \bigcap_{m \in S_2} \overline{A_m}] Pr[\bigcap_{m \in S_2} \overline{A_m}]} \end{aligned}$$

Wenn wir den gemeinsamen Faktor kürzen, erhalten wir [6]:

$$Pr[A_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{A_j}] = \frac{Pr[A_i \cap \bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j} \mid \bigcap_{m \in S_2} \overline{A_m}]}{Pr[\bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j} \mid \bigcap_{m \in S_2} \overline{A_m}]} \tag{3}$$

Weiterhin gilt folgendes für den Zähler in der Gleichung 3 [8]:

$$\begin{aligned} Pr[A_i \cap \bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j} \mid \bigcap_{m \in S_2} \overline{A_m}] &\leq Pr[A_i \mid \bigcap_{m \in S_2} A_m] \\ &= Pr[A_i] \\ &\leq x_i \prod_{(i,j) \in E} (1 - x_j) \end{aligned}$$

da A_i gegenseitig unabhängig von S_2 ist. Für den Nenner der Gleichung 3 nehmen wir an, dass $S_1 = \{j_1, ..., j_r\}$. Falls r=0, dann ist der Nenner 1; falls $r > 0$, setzen wir die Induktionsvoraussetzung ein [8]:

$$\begin{aligned} Pr[\overline{A_{j_1}} \cap ... \cap \overline{A_{j_r}} \mid \bigcap_{m \in S_2} \overline{A_m}] &= (1 - Pr[A_{j_1} \mid \bigcap_{m \in S_2} \overline{A_m}])... \\ (1 - Pr[A_{j_r} \mid \overline{A_{j_1}} \cap ... \cap \overline{A_{j_{r-1}}} \bigcap_{m \in S_2} \overline{A_m}]) & \\ &\geq (1 - x_{j_1})...(1 - x_{j_r}) \\ &\geq \prod_{(i,j) \in E} (1 - x_j) \end{aligned}$$

Wenn wir die obere Schranke des Zählers mit der unteren Schranke des Nenners zusammenfassen, so erhalten wir [8]:

$$Pr[A_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{A_j}] \leq x_i$$

$\square$

Da dieses Lemma allgemein ist, sind in den meisten Fällen der Korollar oder die symmetrische Form des LLL nützlicher.

Korollar. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Abhängigkeitsgraph für die Ereignisse* $A_1, A_2, ..., A_n$ *in einem Wahrscheinlichkeitsraum. Sei* d *der maximale Grad des Abhängigkeitsgraphen und seien:*
(i) $Pr[A_i] < p$, für alle $i \in \{1, ..., n\}$ und ein beliebiges p
(ii) $ep(d + 1) \leq 1$, für e die Basis der natürlichen Logarithmen
dann gilt [3]:

$$Pr[\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}] > 0 \tag{4}$$

Der Beweis des Korollars verläuft ähnlich wie der Beweis des LLL und wird in [9] näher beschrieben.

Symmetrisches LLL. *Sei G=(V,E) ein Abhängigkeitsgraph für die Ereignisse* $A_1, A_2, ..., A_n$ *in einem Wahrscheinlichkeitsraum. Sei* d *der maximale Grad des Abhängigkeitsgraphen und seien:*
(i) $Pr[A_i] \leq p$*, für alle* $i \in \{1, ...n\}$ *und ein beliebiges* p
(ii) $4pd \leq 1$.
dann gilt [6]:

$$Pr[\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}] > 0 \tag{5}$$

Der Beweis der Gleichung 5 verläuft ähnlich wie der Beweis der Gleichung 1 und wird in [6] ausführlich beschrieben.

3 Anwendung: kantendisjunkte Wege

Die typische Anwendung des LLL ist ein gewünschtes Objekt, wie zum Beispiel die Färbung eines Graphen oder eine Route innerhalb eines Netzwerks, zufällig zu erzeugen. Sei A eine Menge von „schlechten" Ereignissen. Das Verfahren ist erfolgreich, falls keines der „schlechten" Ereignissen eintritt. Da die Wahrscheinlichkeit mit der so ein Zustand eintritt auch exponential klein sein kann, kann das LLL nur die Existenz dieses Objektes garantieren. [7]

In der Arbeit von M. Mitzenmacher et al. [6] wurde das Symmetrische LLL angewendet, um die Existenz von n kantendisjunkten Pfaden in einem Netzwerk zu beweisen.

Gegeben ist ein Netzwerk und n Paare von Benutzern, die auf kantendisjunkten Wegen miteinander kommunizieren wollen [6]. Wir betrachten folgendes Experiment: Jedes Paar wählt zufällig einen Weg F_i aus einer Menge von m Wegen. Ein „schlechtes" Ereignis tritt ein, falls die ausgewählten Pfade zweier Paare sich eine Kante teilen.[2] Falls alle möglichen Wege nicht zu viele Kanten miteinander teilen, so ermöglicht das LLL den Beweis der Existenz von n knotendisjunkten Wege. [6]

Theorem. *In einem gegebenen Netzwerk gibt es n knotendisjunkte Pfade, die n Paare von Benutzern verbinden, falls jeder Weg F_i nicht mit mehr als k anderen Wegen eine Kante teilt.*[6]

Beweis. Laut der Annahme wählt sich jedes Paar, unabhängig voneinander, einen Pfad aus einer Menge von m Pfaden. Sei $A_{i,j}$ das Ereignis, das die Paare i und j eine Kante teilen. Da ein Pfad F_i Kanten mit maximal k anderen Pfaden teilt, so ist: $Pr[A_{i,j}] \leq \frac{k}{m} = p$.[6]

Sei $G = (V, E)$ der Abhängigkeitsgraph dieser Aufgabe, dessen Knoten die n verschiedenen Pfaden darstellen. Falls zwei Pfade, F_i und F_j, sich eine Kante im Netzwerk teilen, so ist $(i, j) \in E$. Sei d der maximale Grad von G. Da das Ereignis $A_{i,j}$ unabhängig von allen anderen Ereignissen $A_{i',j'}$ ist, für $i' \notin \{i, j\}$ und $j' \notin \{i, j\}$, gilt $d < 2n$. Folglich gilt auch [6]:

$$4dp = 4d\frac{k}{m} < \frac{8nk}{m} \leq 1$$

Damit sind die Bedingungen für das Symmetrische LLL erfüllt und laut dem Theorem gilt:

$$Pr[\bigcap_{i \neq j} \overline{A_{i,j}}] > 0$$

Da die Wahrscheinlichkeit, dass kein „schlechtes“ Ereignis eintritt, streng größer als Null ist, so gibt es auch n kantendisjunkte Pfade in diesem Netzwerk.[6]

□

J. Beck hat als Erster einen Existenzbeweis zu einem effizienten Verfahren, welches das gesuchte Objekt auch berechnet, weiterentwickelt. Im folgenden Kapitel wird diese Methode anhand eines Beispiels vorgestellt, und zwar anhand des Problems der 2-Färbbarkeit uniformer Hypergraphen. [3]

4 Algorithmische Version

In einigen Fällen kann der rein existentielle Beweis, der uns LLL liefert, benutzt werden um einen effizienten Algorithmus zu konstruieren. Obwohl sich die Einzelheiten bei verschiedenen Problemen unterscheiden, ist die Vorgehensweise dieselbe. Der Algorithmus besteht aus zwei Phasen: in der ersten Phase wird einer Untermenge von Variablen zufällig und unabhängig voneinander Werte zugewiesen; in der zweiten Phase werden denjenigen Variablen Werte zugewiesen, die in der ersten Phase vernachlässigt wurden. Die Untermenge der Variablen aus der ersten Phase wird so ausgewählt, dass es ein Teilergebnis ist. Mit Hilfe des LLL soll man beweisen, dass ausgehend von diesem Teilergebnis es mit einer positiven Wahrscheinlichkeit eine Struktur mit den gewünschten Eigenschaften gibt. [6]

Im folgenden wird dieser Algorithmus anhand des Problems der 2-Färbbarkeit uniformer Hypergraphen veranschaulicht.

Ein Hypergraph $H = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge von Knoten V und einer endlichen Menge von Hyperkanten E. Eine Hyperkante ist eine beliebige Teilmenge aus V. Der Grad eines Knoten in H ist die Anzahl der mit diesem Knoten inzidenten Kanten. Der Grad eines Hypergraphen ist der maximale Grad unter allen Knoten. Die Größe eines Hypergraphen ist die Anzahl seiner Knoten. Die Größe einer Kante ist die Anzahl seiner Knoten. Ein Hypergraph wird als r-regulär bezeichnet, falls alle seine Knoten den Grad r haben. Ein Hypergraph wird als k-uniform bezeichnet, falls alle seine Kanten die Größe k haben. [9]

Die 2-Färbbarkeit von Hypergraphen ist eine Abbildung von V auf einer Menge von 2 Farben, zum Beispiel rot und blau. Das Problem besteht darin, die Knoten des Hypergraphen mit rot und blau zu färben, so dass am Ende keine Kante einfarbig bleibt. [9]

Theorem. *Sei H=(V,E) ein k-uniformer Hypergraph mit N Kanten, in dem jede Kante nicht mehr als d andere Kanten schneidet. Falls $e(d + 1) \leq 2^{k-1}$, dann existiert eine 2-Färbung von V.* [5]

Beweis. Seien $K_1, ..., K_N$ die Kanten des Hypergraphen, so dass jede Menge K_i maximal d andere Mengen schneidet. Für jede Kante K_i sei A_i das Ereignis, dass K_i einfärbig ist [4]:

$$p = Pr[A_i] \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Daraus folgt:

$$ep(d + 1) = e2^{1-k}(d + 1) < 1$$

Damit ist die Voraussetzung für das Korollar erfüllt und es gilt:

$$Pr[\bigcap_{i \in N} \overline{K_i}] > 0$$

Folglich existiert eine 2-Färbung ohne einfarbige Kanten.[4]

$\square$

Theorem. *Sei H=(V,E) ein k-uniformer Hypergraph mit N Kanten, in dem jede Kante nicht mehr als d andere Kanten schneidet. Für konstante d und $k \geq 2$, gibt es einen randomisierten Algorithmus welcher die 2-Färbung von V findet, falls $e(d + 1) \leq 2^{k-1}$.* [1]

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $|V| = m$ mit $m \leq Nk$. Eine Kante K_i wird als *gefährlich* bezeichnet, falls $\frac{k}{2}$ der Knoten schon gefärbt sind und alle Knoten dieselbe Farbe haben. Eine Kante K_i wird als *überlebend* bezeichnet, falls sie am Ende der ersten Phase nicht mit beiden Farben gefärbt ist. Alle nicht gefärbten Knoten werden als *gerettet* bezeichnet. [6]

In der ersten Phase werden alle Knoten $j \in \{1, ..., m\}$ sequentiell durchgegangen und zufällig entweder rot oder blau gefärbt. Nachdem ein Knoten j gefärbt wird, werden jedes Mal alle Kanten, für die $j \in K_i$ gilt, durchsucht und es wird untersucht ob sie *gefährlich* sind. Falls ein Kante *gefährlich* ist, so werden keine weiteren Knoten dieser Kante gefärbt. So ist am Ende der ersten Phase jeder Knoten entweder rot, blau oder *gerettet.*[4]

In der zweiten Phase werden nur die *geretteten* Knoten betrachtet.[8] Mit einer vollen Suche wird eine Belegung für diese Knoten gefunden und damit auch eine 2-Färbung von V erreicht. [6]

Es bleibt noch zu zeigen, dass das Teilergebnis aus der ersten Phase zu einer Lösung weiter entwickelt werden kann und dass die volle Suche aus der zweiten Phase polynomiell in der Anzahl der Knoten berechnet werden kann. [6]

Lemma. *Es gibt eine Zuordnung von Farben zu den Knoten aus V, so dass alle überlebenden Kanten mit zwei Farben gefärbt werden können.*[6]

Beweis. Sei $G = (V', E')$ der Abhängigkeitsgraph für das gegebene Problem, mit der Knotenmenge $V' = V$ und der Kantenmenge E'. Falls $K_i \bigcap K_j \neq \emptyset$, so ist $(i, j) \in E'$. Sei $G' = (V'', E'')$ der Abhängigkeitsgraph für das Teilergebnis, mit $V'' \subset V'$ und $E'' \subset E'$, so dass $i \in V''$ falls K_i eine *überlebende* Kante ist und $(i, j) \in E''$ falls K_i und K_j einen *geretteten* Knoten teilen.[6]

Sei E_j das Ereignis, dass die *überlebende* Kante K_j auch nach der zweiten Phase monochrom bleibt, mit $j \in \{1, ...s\}$ und $|V''| = s$. Damit eine monochrome Kante nach der ersten Phase als *überlebend* bezeichnet wird, sind maximal $\frac{k}{2}$ seiner Knoten schon belegt, also mindestens $\frac{k}{2}$ Knoten *gerettet.* Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Knoten mit derselben Farbe belegt werden ist[6]:

$$p' = Pr[E_j] \leq 2^{1-\frac{k}{2}} < p$$

Laut Voraussetzung ist d der Grad von G. Da G' ein Untergraph von G ist, ist sein Grad d' von d nach oben beschränkt. Wir erhalten also:

$$ep'(d' + 1) < ep(d + 1) < 1$$

Damit ist die Voraussetzung für das Korollar erfüllt und wir haben bewiesen, dass es, ausgehend von dem Teilergebnis, eine 2-Färbung für H gibt.

□

Um zu zeigen, dass die volle Suche aus der zweiten Phase in polynomieller Zeit durchgeführt werden kann, müssen wir beweisen, dass alle zusammenhängenden Komponenten aus dem Abhängigkeitsgraphen G'' eine Größe von $O(\log m)$ haben. [6] Falls das gilt, so kann man in $2^{\log m}$ Schritte alle möglichen Färbungen durchsuchen und eine passende auswählen.[8]

Lemma. *Alle zusammenhängenden Komponenten in G' haben mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - o(1)$ eine Größe von $O(\log m)$.* [8]

Beweis. Angenommen R sei eine zusammenhängende Komponente in G mit r Knoten. Falls R eine zusammenhängende Komponente auch in G' ist, so stellen alle r Knoten *überlebende* Kanten dar. Damit eine Kante nach der ersten Phase *überlebt*, ist entweder sie oder ein Nachbar *gefährlich.*[6] Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kante *gefährlich* ist, ist höchstens $2^{1-\frac{k}{2}}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kante *überlebend* ist, ist also höchstens $(d+1)2^{1-\frac{k}{2}}$. [4]

Wären die *überlebenden* Kanten unabhängig voneinander, so wäre die Lösung dieses Problems einfach. Da es unter den gegebenen Bedingungen nicht immer der Fall ist, suchen wir in R eine Untermenge S von unabhängigen Kanten, also Kanten die im Hypergraphen H keine Knoten teilen. Diese Kanten haben im Abhängigkeitsgraph G eine Distanz von mindestens 4. [6]

In der Arbeit von R. Motwani et al. [8] und in der Arbeit von M. Mitzenmacher et al. [6] wird S als ein 4-Baum aufgebaut, welcher folgende Eigenschaften aufweist:
1. Zwischen je zwei beliebigen Knoten aus S ist die entsprechende Distanz in G mindestens 4;
2. Zwischen zwei Knoten in S gibt es eine Kante, wenn die Distanz zwischen ihnen in G genau 4 beträgt;
3. Jeder Knoten in R ist entweder in S oder hat eine Dinstanz von höchstens 3 von einem Knoten in S.

4-Bäume zu betrachten ist vorteilhaft, da die Ereignisse, dass Knoten aus S *überleben*, unabhängig voneinander sind.[6] Sei D_i die Menge der *überlebenden* Kanten in einer Entfernung von höchstens eins von der Kante K_i in S, mit $0 \leq i \leq |S|$. Da die Kanten in S unabhängig voneinander sind, gibt es $(d+1)^{|S|}$ Möglichkeiten die Mengen D_i zu bilden. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kanten aus D_i, $0 \leq i \leq |S|$, *gefährlich* sind, ist kleiner oder gleich mit $2^{|S|(1-\frac{k}{2})}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kanten aus S *überleben* ist also kleiner oder gleich mit:[8]

$$((d+1)2^{1-\frac{k}{2}})^{|S|} \tag{6}$$

Das Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit der eine zusammenhängende Komponente größer als $c \log m$ ist, für eine beliebige Konstante c. Wir berechnen zuerst eine obere Schranke für die Anzahl der 4-Bäume der Größe r und benutzen das Ergebnis, um die Wahrscheinlichkeit, dass ein großer 4-Baum *überlebt*, zu beschränken. [8]

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, nehmen wir an, dass S der maximale 4-Baum ist. S hat also die größte Anzahl von Knoten. Da der Grad des Abhängigkeitsgraphen G'' von d beschränkt ist, gibt es für jeden Konten aus R

höchstens:

$$d + d(d+1) + d(d+1)(d+1) \leq d^3 - 1$$

Knoten mit einem Abstand von höchstens 3. Da es insgesamt r Knoten in R gibt, hat S mindestens $\frac{r}{d^3}$ Knoten. [6]

Die Anzahl der 4-Bäume ist nicht größer als die Anzahl der zusammenhängenden Komponenten im G''.[8] Um zu zeigen, dass es für R eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit gibt, um größer als $c \log m$ zu sein, zeigen wir, dass es für ein 4-Baum eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit gibt, um eine größe von $\frac{r}{d^3}$ zu haben.[6]

Wir zählen zuerst alle 4-Bäume der Größe $l = \frac{r}{d^3}$ in dem Abhängigkeitsgraphen G. Da es m Knoten im Hypergraphen gibt, gibt es auch m Möglichkeiten eine Wurzel für einen 4-Baum zu wählen. Ein Baum wird als ein Euler Graph definiert, dessen Rundgang in der Wurzel beginnt, alle Kanten zwei Mal durchläuft, einmal in jeder Richtung, und in der Wurzel endet.[6] Alle Knoten in diesem 4-Baum haben $O(d^4)$ Nachbarn.[8] Die Anzahl der 4-Bäume der Größe $l = \frac{r}{d^3}$ ist also nach oben beschränkt von:[6]

$$m(d^4)^{2l} = md^{\frac{8r}{d^3}} \tag{7}$$

Laut der Gleichung 6 ist die Wahrscheinlichkeit, dass so ein Baum in G' *überlebt*:

$$((d+1)2^{1-\frac{k}{2}})^s = ((d+1)2^{1-\frac{k}{2}})^{\frac{r}{d^3}} \tag{8}$$

Wenn man die Gleichungen 7 und 8 miteinander multipliziert, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, dass ein 4-Baum die erste Phase *überlebt*:[8]

$$md^{\frac{8r}{d^3}}((d+1)2^{1-\frac{k}{2}})^{\frac{r}{d^3}} \tag{9}$$

Für $r > c \log m$ und für ein genügend großes c, ist die Gleichung 9 gleich o(1).[4]

□

Falls nach der ersten Phase eine zusammenhängende Komponente in G' entsteht, so wiederholen wir die erste Phase; der erwartete Wert der Wiederholungen ist kleiner als 2. Wir nehmen also an, dass wir in der zweiten Phase nur zusammenhängende Komponenten der Größe $O(\log m)$ haben. Die Anzahl der *geretteten* Knoten ist $O(\log m)$ und wir können in Polynomialzeit eine erfüllende Belegung für sie finden.[8]

□

Für einen k-uniformen Hypergraphen mit einem Grad von l, stellt sich die Frage, für welche Paare von Werten von k und l man das Korollar anwenden kann. Für das Paar $k = 9$ und $l = 11$ gibt es dem Korollar nach eine 2-Färbbarkeit, da $e(9 * 10 + 1) \leq 2^8$.[5] Wir nehmen $d = 90$, da eine Kante 9 Knoten enthält und höchstens 11 andere Kanten schneidet.

Falls d eine Funktion von k und d immer kleiner als k ist, zum Beispiel $d \leq 2^{\frac{k}{500}}$, kann man auch das Korollar anwenden.[1] Falls H ein k-uniformer und k-regulärer Hypergraph ist, so kann man auch eine 2-Färbbarkeit mit Hilfe des Korollars nachweisen.[5]

Für das Paar $k = 8$ und $l = 12$ kann man das Korollar jedoch nicht mehr anwenden.In der Arbeit [5] befasst sich McDiarmid mit einer verbesserten Version des LLL. Er wendet das Lemma an, um das Problem der 2-Färbbarkeit für einen 8-uniformen Hypergraphen mit einem Grad von 12 zu lösen.

Lopsided LLL. *Sei H ein Hypergraph, in dem jede Kante mindestens k Knoten enthält und höchstens d andere Kanten schneidet. Falls* $e(d+2) \leq 2^k$ *gilt, dann existiert eine 2-Färbung für die Knoten aus H.*[5]

Setzen wir die Werte $k = 8$ und $l = 12$ in das *Lopsided LLL* ein, so erhalten wir: $e(8 * 11 + 2) \leq 2^8$, was auch stimmt.[5] Man kann also bemerken, dass die *Lopsided LLL* eine verbesserte Variante des Korollars, im Bezug auf die 2-Färbbarkeit von Hypergraphen, darstellt.

5 Schlussfolgerung

In dieser Arbeit wurde eine Methode vorgestellt, um die Existenz von Objekten mit gewünschten Eigenschaften zu beweisen. Beck hat für einige Anwendungen eine Methode entwickelt, um aus einem Existenzbeweis das gesuchte Objekt in Polynomailzeit zu konstruieren.

In der Literatur gibt es mehrere Erweiterungen dieser Methode. Alon [1] hat eine parallelisierbare Version dieses Algorithmes erstellt. In den meisten Fällen muss das Problem auf dem Korollar reduziert werden, um einen effizienten Algorithmus zu erhalten. Molloy und Reed [7] haben für einige Probleme das allgemeine Lemma benutzt und in Polynomialzeit das gesuchte Objekt konstruiert.

Das LLL ist ein wichtiges Instrument für randomisierte Algorithmen und kann bei vielen Problemen angewendet werden, wie zum Beispiel bei Routing und Scheduling Algorithmen[9] sowie in der linearen Programmierung[3].

Literatur

[1] Noga Alon. A parallel algorithmic version of the local lemma. *Random Structures Algorithms*, 2(4):367–378, 1991.

[2] Andrei Z. Broder, Alan M. Frieze, and Eli Upfal. Existence and construction of edge-disjoint pathson expander graphs. *SIAM J. Comput.*, 23(5):976–989, 1994.

[3] Artur Czumaj and Christian Scheideler. An algorithmic approach to the general lovász local lemma with applications to scheduling and satisfiability problems. In *ACM Symposium on Theory on Computing*, pages 38–47, 2000.

[4] Rohit Khandekar. Beck's algorithm for colouring hyper-graphs.

[5] Colin McDiarmid. Hypergraph colouring and the lovasz local lemma. *Discrete Math.*, 167-168:481–486, 1997.

[6] Michael Mitzenmacher and Eli Upfal. *Probability and Computing : Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge University Press, January 2005.

[7] M. Molloy and B. Reed. Further algorithmic aspects of the local lemma. In *STOC '98 (Dallas, TX)*, pages 524–529, New York, 1999. ACM.

[8] Rajeev Motwani and Prabhakar Raghavan. *Randomized algorithms*. Cambridge University Press, 1995.

[9] Anand Srivastav. The lovasz local lemma and scheduling. In *Approximation and Online Algorithms*, pages 321–347. Springer, 2006.