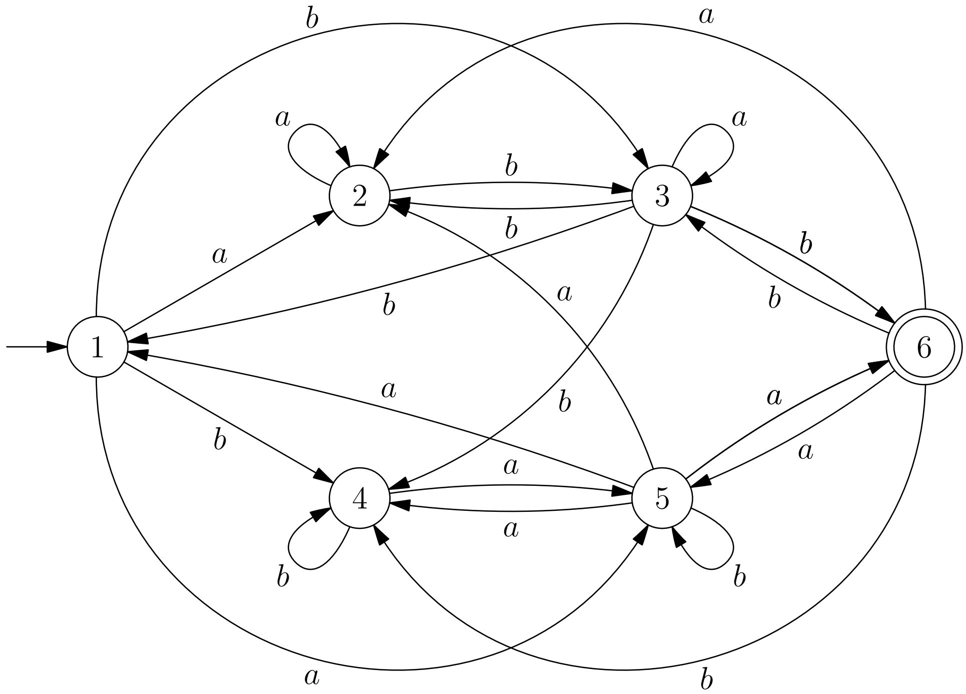
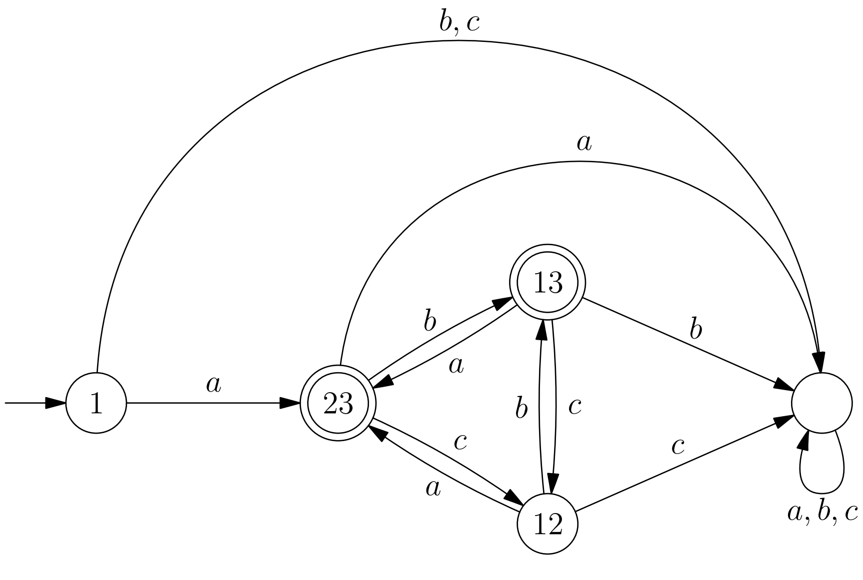
Lösungsvorschlag zur Vorlesung Formale Sprachen, Automaten und Prozesse

Aufgabe T7



Aufgabe T8

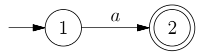


Aufgabe T9
Es gilt $\emptyset^* L(L\emptyset + \varepsilon)^* = L$.

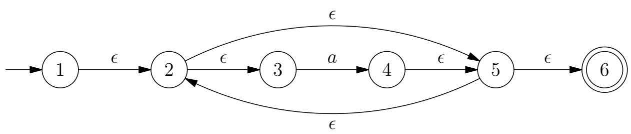
Aufgabe T10
Ein kürzestes Wort kann maximal eine Länge von $n-1$ haben: Sei $w \in L(M)$, mit länge größer oder gleich n. Daraus folgt, dass man entlang der Transitionen einen Kreis gelaufen ist, welchen man auch weglassen kann und das Wort trotzdem akzeptiert wird. Durch genaueres hinsehen kann man erkennen, dass sogar $n - |F|$ gilt.
Das kürzeste Wort kann aber auch beliebig kürzer sein, dies hängt dann davon ab wie weit ein Endzustand vom Startzustand entfernt ist (diese Distanz kann auch 0 sein).

Aufgabe H5 (5+5+5 Punkte)

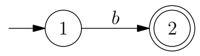
a) Wir beginnen mit einem ϵ-NFA für den Ausdruck a.



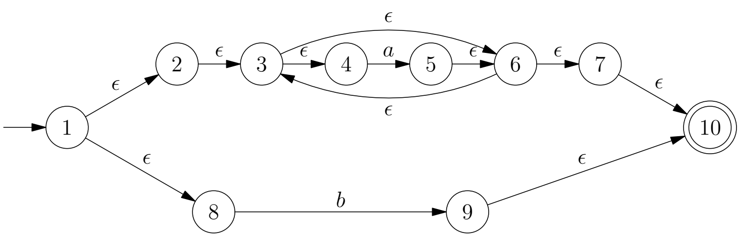
Nun erstellen wir einen ϵ-NFA für a^*.



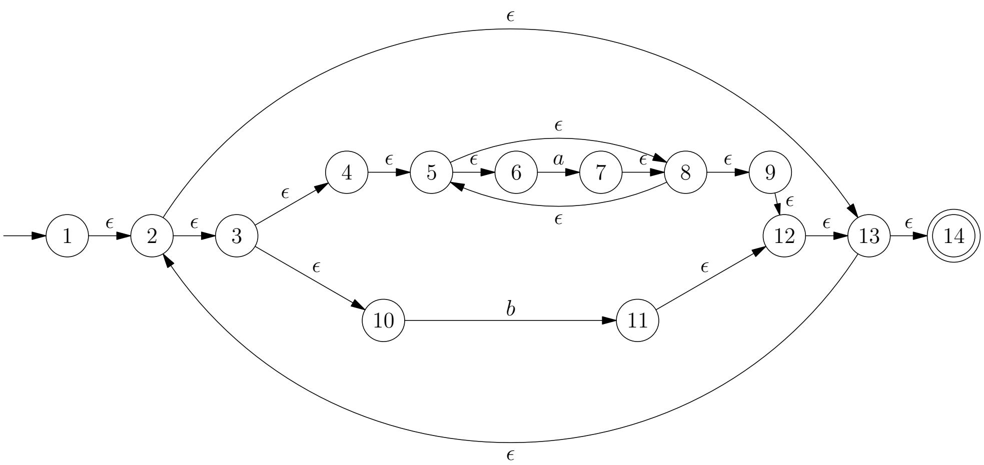
Wir wiederholen die Prozedur für b.



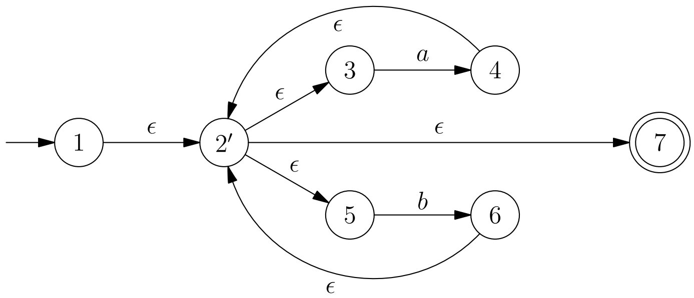
Wir erhalten einen ϵ-NFA für $(a^* + b)$.



Schließlich ergibt sich ein ϵ-NFA für $(a^* + b)^*$.



b) Eine Begründung kann wie folgt aussehen. Sei $C = (q_1 \dots q_n,\ q_1)$ ein solcher Kreis. Jeder Lauf des Automaten, der einen Zustand q_i enthält, kann so erweitert werden, dass nach q_i der gesamte Kreis anhand der ϵ-Transitionen einmal durchlaufen wird, d.h. er die Form $\dots,\ q_i, q_{i+1 \bmod n}, \dots q_i,\ \dots$ hat ohne den letzten Zustand des Laufes zu verändern. Im zusammengeschrumpften Automaten entspricht dies dann dem Lauf $\dots, q_C, \dots$. Also induziert jeder akzeptierende Lauf im zusammengeschrumpften Automaten einen akzeptierenden Lauf im Ausgangsautomaten und umgekehrt. Insbesondere ändert sich die Menge der akzeptierten Wörter nicht, d.h. die Automaten sind äquivalent. Ein ϵ-Kreis ist hier $(2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13)$, sodass wir diese acht Zustände zu einem neuen Zustand $2'$ zusammenschrumpfen können.



c) Wir berechnen die ϵ-Hüllen der Zustände.

Zustand	ϵ-Hülle
1	$\{1, 2', 6, 10, 14\}$
$2'$	$\{2', 6, 10, 14\}$
6	$\{6\}$
7	$\{2', 6, 7, 10, 14\}$
10	$\{10\}$
11	$\{2', 6, 10, 11, 14\}$
14	$\{14\}$

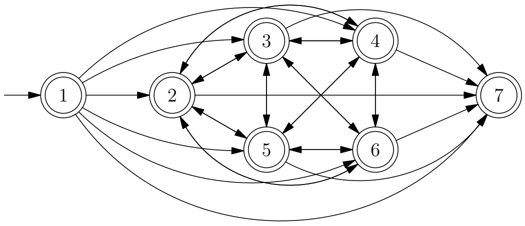
Jeder Zustand, der den Zustand 14 in seiner ϵ-Hülle enthält, wird im NFA ohne ϵ-Transitionen zu einem Endzustand. Mit Hilfe der Tabelle ergibt sich beim Eliminieren der ϵ-Transitionen die unten angegebene Übergangsfunktion δ. Für eine einfachere Schreibweise seien $A = \{2', 6, 7, 10, 14\}$ und $B = \{2', 6, 10, 11, 14\}$.

Der resultierende NFA ohne ϵ-Transitionen ist somit

$$(\{1, 2', 6, 7, 10, 11, 14\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{1,\ 2',\ 7,\ 11,\ 14\}).$$

$$\begin{aligned}
\delta(1, a) &= A \\
\delta(1, b) &= B \\
\delta(2', a) &= B \\
\delta(2', b) &= B \\
\delta(6, a) &= A \\
\delta(7, a) &= A \\
\delta(7, b) &= B \\
\delta(10, b) &= B \\
\delta(11, a) &= A \\
\delta(11, b) &= B
\end{aligned}$$

Die graphische Darstellung des Automaten sieht wie folgt aus, wobei nicht beschriftete Transitionen den Wert „a, b“ haben.



Aufgabe H6 (10 Punkte)
Für einen regulären Ausdruck betrachten wir die folgenden drei Eigenschaften:

(i) $L(R)$ ist leer

(ii) $L(R)$ enthält ein nicht-leeres Wort

(iii) $L(R)$ enthält ein unendlich langes Wort

Für atomare Ausdrücke gilt: $\emptyset$ erfüllt nur (i), $a \in \Sigma$ erfüllt nur (ii) und ε erfüllt keine der drei Eigenschaften. Induktiv gilt weiterhin:

AB erfüllt (i) genau wenn A oder B (i) erfüllen.

AB erfüllt (ii) genau wenn A oder B (ii) erfüllen und A und B nicht (i) erfüllen.

AB erfüllt (iii) genau wenn A oder B (iii) erfüllen und A und B nicht (i) erfüllen.

$A + B$ erfüllt (i) genau wenn A und B (i) erfüllen.

$A + B$ erfüllt (ii) genau wenn A oder B (ii) erfüllen.

$A + B$ erfüllt (iii) genau wenn A oder B (iii) erfüllen.

A^* erfüllt nie (i).

A^* erfüllt (ii) genau wenn A (ii) erfüllt.

A^* erfüllt (iii) genau wenn A (ii) oder (iii) erfüllt.

Wir entscheiden ob $L(R)$ unendlich viele Worte enthält, indem wir rekursiv über den Aufbau des regulären Ausdrucks (i), (ii) und (iii) berechnen. Dies geht in linearer Zeit.