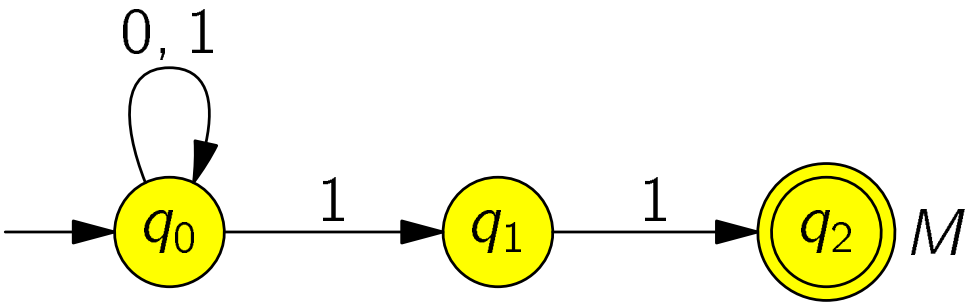
Einige Vorteile endlicher deterministischer Automaten:

- durch Computer *schnell* simulierbar
- wenig Speicher benötigt:
  Tabelle für δ (read-only), aktueller Zustand
- Eingabe kann vergessen werden, nur von links nach rechts lesen
- Sie können schön visualisiert werden
- Sie können automatisch generiert werden (z.B. lex, egrep)

Nichtdeterministische endliche Automaten (NFAs)



Dies ist kein DFA!

1. Zwei Transitionen mit 1 aus q_0
2. Keine Transition mit 0 aus q_1

Welche Sprache soll M erkennen?

Nichtdeterministische endliche Automaten (NFAs)

Definition

Ein NFA ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Q Menge der *Zustände*
- Σ *Eingabealphabet*
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to 2^Q$ *Übergangsfunktion*
- $q_0 \in Q$ *Startzustand*
- $F \subseteq Q$ *Endzustände*

Definition

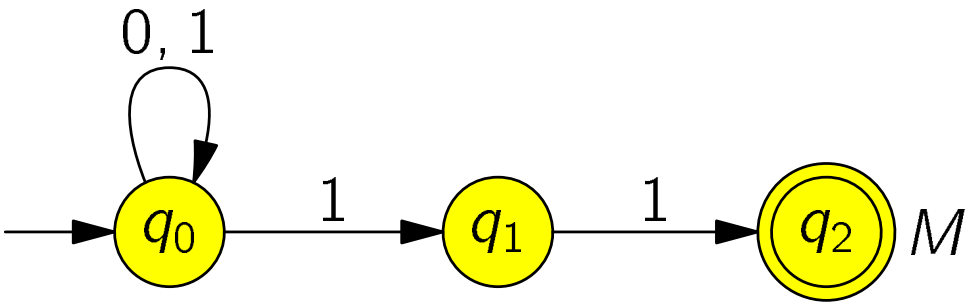
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA.

$\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ definiert durch

- $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}$
- $\hat{\delta}(q, wa) = \{p \mid \text{es gibt } r \in \hat{\delta}(q, w) \text{ und } p \in \delta(r, a)\}$

$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$

Beispiel



- $\delta(q_0, 0) = \{q_0\}$
- $\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 010110101101) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 11111) = \{q_0, q_1, q_2\}$

$L(M) = (0 + 1)^*11$

Der Potenzautomat

Definition

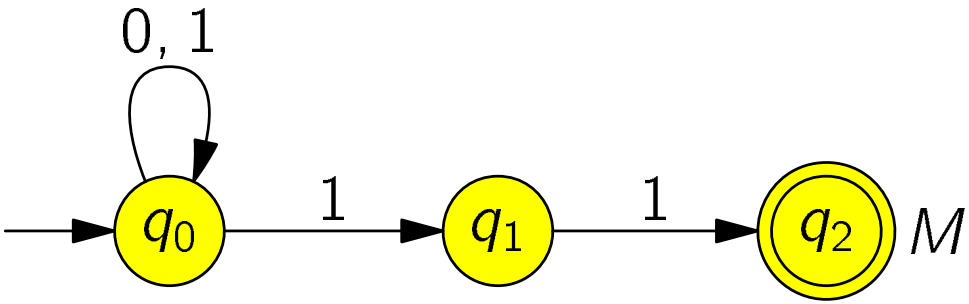
Sei M ein NFA, $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Der zugehörige *Potenzautomat* M' ist so aufgebaut:

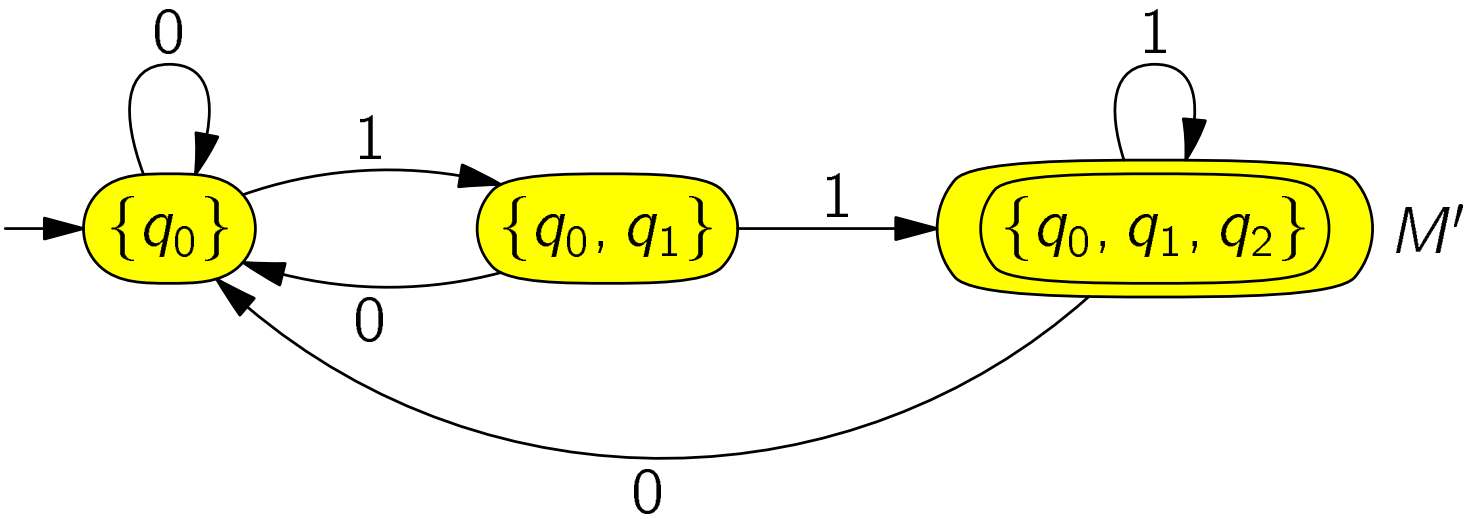
- $M' = (2^Q, \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ mit
- $\delta' : 2^Q \times \Sigma \to 2^Q, (S, a) \mapsto \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$
- $F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$

Der Potenzautomat ist ein DFA!

Beispiel



Der Potenzautomat hat die Zustände $\emptyset$, $\{q_0\}$, $\{q_1\}$, $\{q_2\}$, $\{q_0, q_1\}$, $\{q_0, q_2\}$, $\{q_1, q_2\}$ und $\{q_0, q_1, q_2\}$ und sieht so aus:



Nichterreichbare Zustände weggelassen!

Theorem

Zu jedem NFA M gibt es einen DFA M' mit $L(M) = L(M')$

Beweis.

$L(M) = L(M')$ für den Potenzautomaten M':

- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- $M' = (2^Q, \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ mit
- $\delta' : 2^Q \times \Sigma \to 2^Q, (S, a) \mapsto \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$
- $F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$

Induktion über $|w|$: $\hat{\delta}'(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}(q_0, w)$

Daher:

$\hat{\delta}'(\{q_0\}, w) \in F' \iff \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ □

Vergleich: DFA und NFA

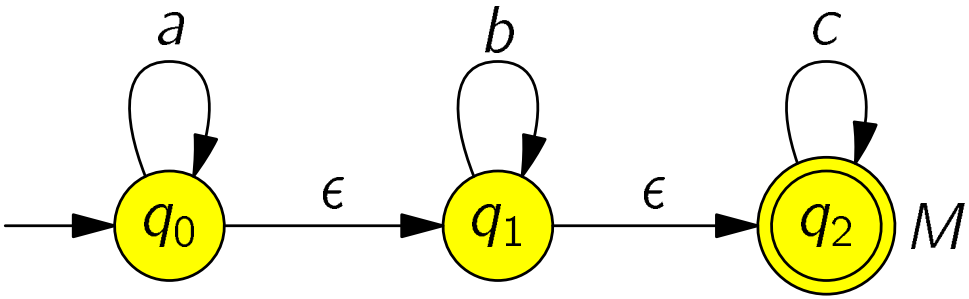
Vorteile eines DFA:

- Effizient simulierbar

Vorteile eines NFA:

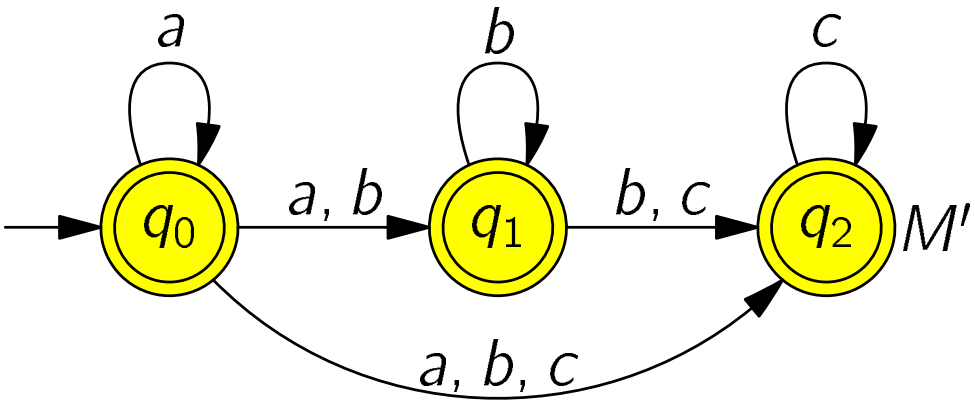
- Oft kleiner als DFA
- Einfacher zu entwerfen
- Halbwegs effizient simulierbar

NFAs mit ϵ-Übergängen



Dies ist kein NFA!

Ziel: Erkenne die Sprache $a^* b^* c^*$.



NFA ist komplizierter!

Definition

Ein *NFA mit ϵ-Übergängen* ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

1. $\delta\colon Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$,
2. Q, Σ, q_0, F wie bei NFAs.

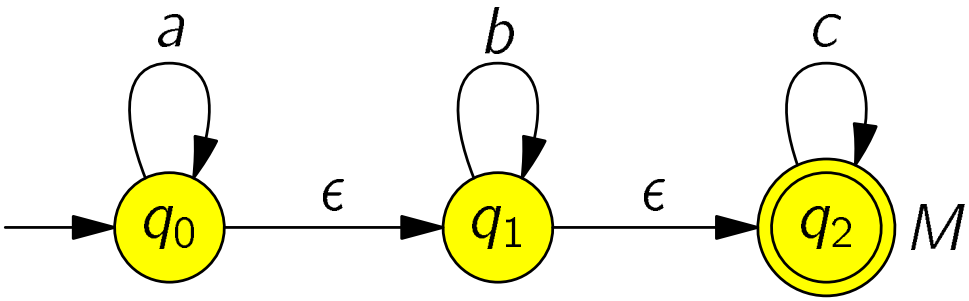
Für $q \in Q$:

$$\epsilon\text{-Hülle}(q) := \{\, p \in Q \mid \text{es gibt } q_1, \ldots, q_n \text{ mit } q_{i+1} \in \delta(q_i, \epsilon) \text{ für } 1 \leq i < n \text{ und } q = q_1,\ p = q_n \,\}$$

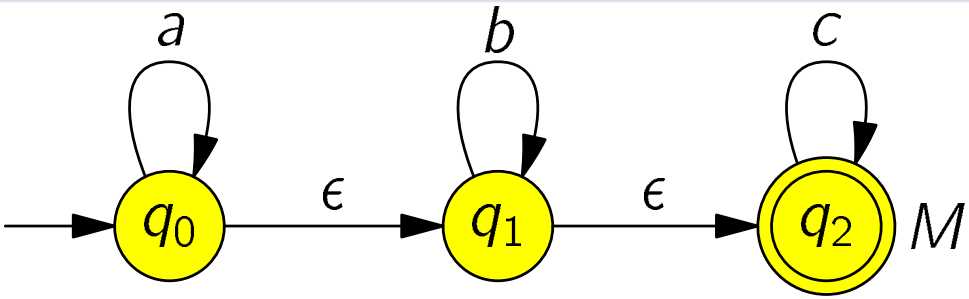
Für $S \subseteq Q$:

$$\epsilon\text{-Hülle}(S) := \bigcup_{q \in S} \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

Beispiel



- ϵ-Hülle$(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- ϵ-Hülle$(q_1) = \{q_1, q_2\}$
- ϵ-Hülle$(q_2) = \{q_2\}$
- ϵ-Hülle$(\{q_1, q_2\}) = \{q_1, q_2\}$



Definition

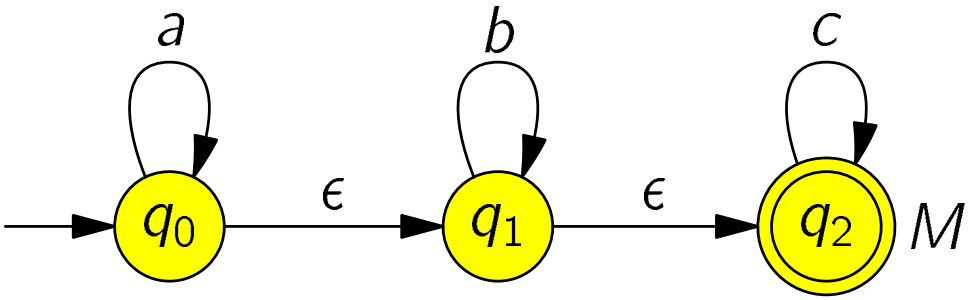
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA mit ϵ-Übergängen.
Es sei $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$.

- $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \epsilon$-Hülle$(q)$
- $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,w)} \epsilon$-Hülle$(\delta(p, a))$

Informell:
$\hat{\delta}(q, a)$ sind Zustände, die von q erreichbar sind:

1. Zunächst über ϵ-Transitionen
2. Dann über eine a-Transistion
3. Dann über ϵ-Transitionen

Beispiel



- $\delta(q_0, a) = \{q_0\}$
- $\hat{\delta}(q_0, a) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\delta(q_0, b) = \emptyset$
- $\hat{\delta}(q_0, b) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta(q_0, \epsilon) = \{q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0, q_1, q_2\}$

Theorem

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA mit ϵ-Übergängen.
Dann gibt es einen NFA M' mit $L(M') = L(M)$.

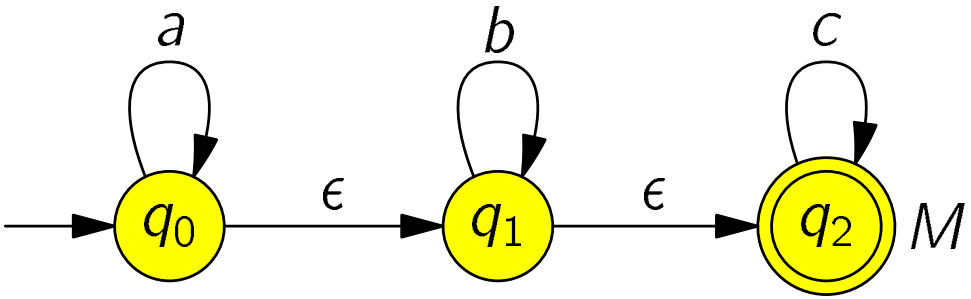
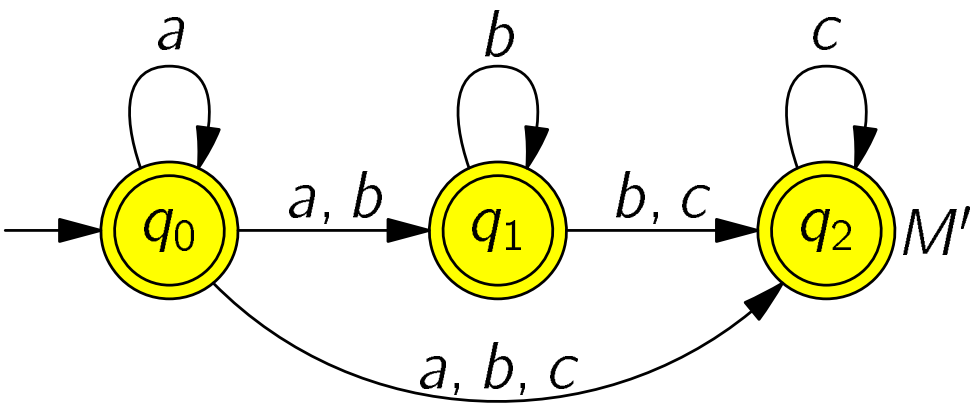
Beweis.

$M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$ mit

- $\delta'(q, a) = \hat{\delta}(q, a)$,
- $F' = \{ q \in Q \mid \epsilon\text{-Hülle}(q) \cap F \neq \emptyset \}$.

□

Informell:
$p \in \delta'(q, a)$ gdw. in M gibt es Pfad von q nach p, der

1. zunächst mit ϵ beschriftet ist,
2. dann einen a-Übergang hat,
3. dann wieder mit ϵ beschriftet ist.

Beispiel