DFAs erkennen reguläre Sprachen

Theorem

M ein DFA $\Rightarrow L(M)$ regulär

Beweis

Idee: $w \in L_{ij}^k$ genau dann wenn

1. $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$
2. $\hat{\delta}(q_i, u) = q_m$ mit $m \leq k$ für alle $u \sqsubseteq w$, $u \neq \epsilon$, $u \neq w$ ($u \sqsubseteq v$ gdw. $ux = v$ für ein x)

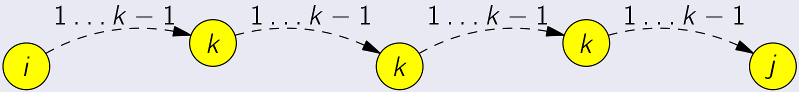
Anschaulich:

1. w bringt M von q_i nach q_j.
2. Dazwischen durchläuft M nur Zustände aus $\{q_1, \ldots, q_k\}$.

Beweis.

$$L_{ij}^0 := \begin{cases} \{\, a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j \,\} & \text{falls } i \neq j, \\ \{\, a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_i \,\} \cup \{\epsilon\} & \text{falls } i = j, \end{cases}$$

$$L_{ij}^k := L_{ij}^{k-1} \cup L_{ik}^{k-1} (L_{kk}^{k-1})^* L_{kj}^{k-1} \text{ für } k > 0$$



Korrektheit: Induktion über k.

Es ist leicht reguläre Ausdrücke für L_{ij}^k zu finden.

Regulärer Ausdruck für $L(M) = \bigcup_{q_j \in F} L_{1j}^n$. □

Der Komplementärautomat

Theorem

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.
Dann ist $\Sigma^* - L(M)$ regulär.

$\Sigma^* - L$ ist das Komplement von L.

Beweis.

$M' := (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$.
Es gilt $L(M') = \Sigma^* - L(M)$:

$$\hat{\delta}(q_0, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \notin Q - F$$

$\square$

Der Produktautomat

Definition

Es seien $M' = (\Sigma, Q', \delta', q_0', F')$ und $M'' = (\Sigma, Q'', \delta'', q_0'', F'')$ zwei DFAs.

Wir definieren den *Produktautomaten* $M = M' \times M''$:

$M = (\Sigma, Q' \times Q'', \delta, (q_0', q_0''), F' \times F'')$
mit $\delta((q, p), a) = (\delta'(q, a), \delta''(p, a))$.

Theorem

Wenn M' und M'' DFAs sind und $M = M' \times M''$, dann $L(M) = L(M') \cap L(M'')$.

Beweis.

$\hat{\delta}((q_0', q_0''), w) = (\hat{\delta}'(q_0', w), \hat{\delta}''(q_0'', w))$
(Induktion über $|w|$)
und damit

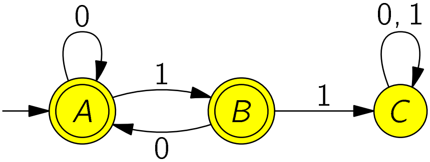
$$\begin{aligned} w \in L(M) &\Leftrightarrow \hat{\delta}((q_0', q_0''), w) \in F' \times F'' \\ &\Leftrightarrow (\hat{\delta}'(q_0', w), \hat{\delta}''(q_0'', w)) \in F' \times F'' \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}'(q_0', w) \in F' \text{ und } \hat{\delta}''(q_0'', w) \in F'' \\ &\Leftrightarrow w \in L(M') \text{ und } w \in L(M''). \end{aligned}$$

Daher ist $L(M) = L(M') \cap L(M'')$. $\square$

Beispiel

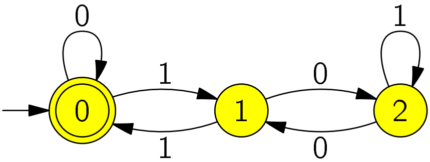
Konstruiere DFA für Sprache aller w mit:

1. Es kommt 11 nicht als Unterwort in w vor.



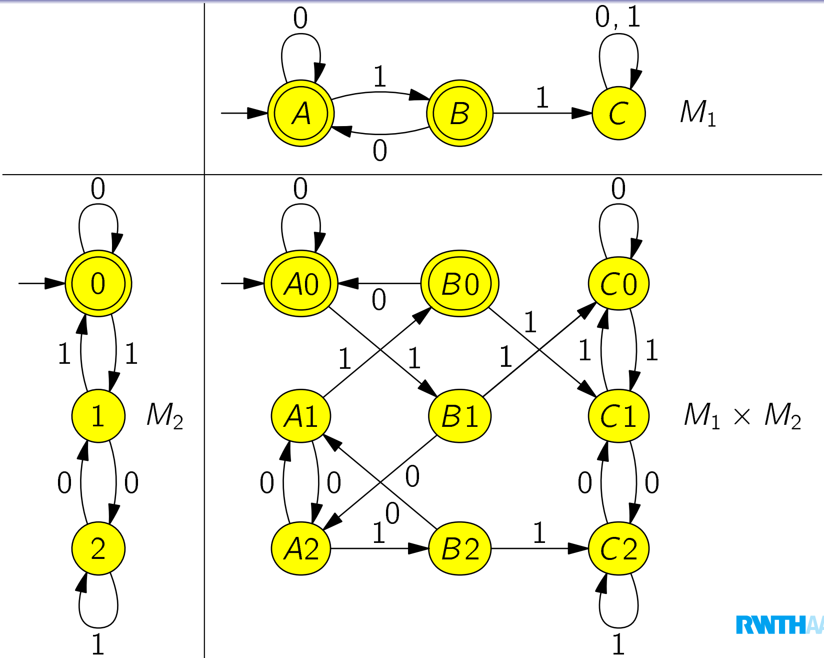
M_1

2. Als Binärzahl ist w durch drei teilbar.



M_2

Konstruiere $M_1 \times M_2$!


0
0, 1
1
1
A
B
C
0
M_1
0
0
0
0
1
1
1
1
1
1
1
1
M_2
$M_1 \times M_2$
0
0
0
0
0
0
0
0
0
A0
B0
C0
A1
B1
C1
A2
B2
C2
2
1
1
1