RWTH Aachen **WS 2008/09**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Übungsblatt 6
Kneis—Langer—Richter—Rossmanith 27.11.2008

♡ Übung zur Vorlesung Parametrisierte Algorithmen ♡

Tutoraufgabe T18

Analysieren Sie die Laufzeit eines Vertex Cover-Algorithmus mit dem Branching Vector $(1, 1)$, wenn wir Interleaving benutzen.

Lösungsvorschlag Sei $r(n)$ die Laufzeit der Kernelreduktion, die einen Kernel der Größe $2k$ übriglässt, $p(n)$ die Laufzeit des Algorithmus, bis es zum branching kommt. Wir nehmen an, es wird immer reduziert, dann irgendwas zwischendurch gerechnet ($p(n)$), dann gebrancht. Dann ist die Gesamtlaufzeit

$$\begin{aligned} r(n) + p(2k) + 2(r(2k) + p(2(k-1)) + \dots 2^k(r(2) + p(0)) &= \\ r(n) + \sum_{i=k}^{0} 2^{k-i} p(2i) + 2^{k-i+1} r(2i) &= \\ r(n) + 2^k \sum_{i=0}^{k} 2^{-i}(p(2i) + 2r(2i)) & \end{aligned}$$

und mit $p(2i) + 2r(2i) \in O(i^c)$ gilt

$$2^k \sum_{i=0}^{k} 2^{-i}(p(2i) + 2r(2i)) \in 2^k O(1) \sum_{i=0}^{k} i^c 2^{-i} \subseteq 2^k O(1) \sum_{i \le 0} (3/2)^{-i} \subseteq 2^k O(1) O(1) = 2^k O(1).$$

Also ist $r(n) + 2^k O(1)$ eine Schranke für die Laufzeit.

Tutoraufgabe T19

Finden Sie die Baumweite folgender Graphen:

1. Das Nikolausäische Haus.
2. Ein Wagenrad mit n Speichen, $n \geq 3$.
3. Ein $n \times m$-Gitter.

Lösungsvorschlag

1. Das Haus vom Nikolaus enthält eine 4-Clique, die auch komplett in einem Bag vorkommen muß (leicht über die Polizistenstrategie einsehbar). Ein weiterer Bag enthält das Dach, die beiden Bags sind verbunden. Die Weite ist also 3.

2. Die Bags haben die Form $\{0, 1, 2, n\}, \{0, 2, 3, n\}, \ldots, \{0, n-2, n-1, n\}$, wobei 0 für den Achsenknoten steht, und sind in dieser Reihenfolge zu einem Pfad verbunden. Die Weite ist also auch höchstens 3.

   Um zu zeigen, daß die Baumweite größer als 2 sein muß, betrachten wir die Charakterisierung über das Räuber-Polizisten-Spiel und zeigen, daß der Räuber bei höchstens drei Polizisten eine Gewinnstrategie hat:

   Wir unterteilen das Wagenrad in vier nicht leere Bereiche: Ein Bereich wird von der Narbe des Rades gebildet, und die anderen drei Bereiche partitionieren die übrigen n-Knoten, so daß jeder Bereich in sich zusammenhängend ist.

   Man beachte, daß jeder der Bereiche mit jedem anderen über eine Kante verbunden ist, mit anderen Worten: Der Graph der Bereiche bildet eine 4-Clique. Damit sieht man aber direkt, daß der Räuber eine Gewinnstrategie hat:

   Bei nur drei Polizisten bleibt stets ein Bereich ohne Polizist. Der Räuber wechsle ständig in den freien bzw. (während des Landeanflugs des Polizisten) freibleibenden Bereich. Da der Räuber von jedem Bereich in jeden wechseln kann, können drei Polizisten ihm den Weg niemals versperren.

   Die Baumweite des Wagenrads ist also auch mindestens 3.

3. oBdA sei $m < n$. Die Bags haben die Form $\{1-1, 1-2, \ldots, 1-m, 2-1\}, \{1-1, 1-2, \ldots, 1-m, 2-2\}, \ldots, \{2-1, 2-2, \ldots, 2-m, 3-1\}, \ldots, \{n-1, \ldots, n-m\}$ und sind in dieser Reihenfolge zu einem Pfad verbunden. Die Weite ist damit m.

   Um zu zeigen, daß m auch eine untere Schranke ist, geben wir wieder eine Gewinnstrategie für den Räuber auf dem $m \times m$-Gitter an (einem Teilgraphen des $m \times n$-Gitters) an, wenn es höchstens m Polizisten gibt:

   Betrachte die folgenden Bereiche:

   - Der erste Bereich ist die komplette erste Spalte des Gitters.
   - Der zweite Bereich ist die erste Zeile des Gitters abzüglich der ersten Spalte.
   - Für jedes $1 < i, j \leq m$ definiere einen Bereich bestehend jeweils aus der i-ten Spalte abzüglich der ersten Zeile vereinigt mit der j-ten Zeile abzüglich der ersten Spalte. Dieses seien die „Kreuze," von denen es $(m-1)^2$ viele gibt.

   Jeder dieser Bereiche ist wieder von jedem anderen Bereich direkt erreichbar: Entweder überlappen sie sich, oder sie sind über eine Kante im Gitter verbunden. Die Strategie des Räubers sieht nun wieder vor, sich jeweils in den Bereich zu retten, in dem überhaupt kein Polizist steht bzw. plant zu landen. Dieses ist eine Gewinnstrategie, denn alle Bereiche sind miteinander verbunden, und m Polizisten können zusammen nie alle Bereiche gleichzeitig belegen: Um alle $(m-1)^2$ der (i, j)-Kreuze abzudecken, sind bereits $m-1$ Polizisten nötig. Der letzte Polizist kann nur noch entweder die erste Spalte oder Zeile abdecken, womit immer ein Bereich frei bleibt.

Hausaufgabe H10

Verfeinern Sie die Analyse aus T18, um herauszufinden, wie groß die versteckten Konstanten werden. Benutzen Sie dabei sinnvolle Annahmen über die Laufzeiten der Teilalgorithmen, z.B. für die Kernelreduktion $r(n) = n^2$.

Lösungsvorschlag
Wir nehmen an, daß $p(2i)+2r(2i) \leq ci^2$. Dann ist die Laufzeit des gesamten Algorithmus

$$r(n) + 2^k \sum_{i=0}^{k} 2^{-i}(p(2i) + 2r(2i)) = n^2 + c2^k \sum_{i=0}^{k} 2^{-i} i^2.$$

Wir substituieren q für $1/2$ und schätzen die Summe ab:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} i^2 q^i &\leq \sum_{i\geq 0} i^2 q^i = \\ q\frac{d}{dq} q\frac{d}{dq} \sum_{i\geq 0} q^i &= q\frac{d}{dq} q\frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = \\ q\frac{d}{dq} \frac{q}{(1-q)^2} &= \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}. \end{aligned}$$

Mittels Rücksubstitution erhalten wir sechs als Abschätzung für die Summe und damit für die Laufzeit n^2+6c2^k. Die Summe läßt sich sogar in geschlossener Form exakt ausrechnen, aber der Erkenntnisgewinn ist im Verhältnis zur Formelgröße gering. Man erkennt auch so, daß die Konstanten, die beim Interleaving in der Laufzeit entstehen, erstaunlich klein sind.

Hausaufgabe H11
Sie haben einen Graphen G und wissen, daß er ein Vertex Cover der Größe k besitzt. Was können Sie über seine Baumweite sagen?

Lösungsvorschlag Wenn man ein Vertex Cover aus dem Graphen nimmt, bleiben nur isolierte Knoten zurück. Wenn man also auf dem Cover k Polizisten abstellt, genügt ein weiterer, um den Räuber auf dem jeweiligen isolierten Knoten dingfest zu machen. Die Baumweite ist also durch k beschränkt.

Hausaufgabe H12
Ein n-Kringel ist ein $3n \times 3n$-Gitter, aus dem ein $n \times n$-Gitter entfernt wurde.
Finden Sie die Baumweite solcher n-Kringel.

Lösungsvorschlag
Die Baumweite ist $2n$: n Polizisten bilden eine Linie, und die nächsten $n + 1$ Polizisten kreisen den Räuber in einer ähnlichen Strategie zum $n \times n$ Gitter ein. Für die untere Schranke verwenden wir das gleiche Verfahren wie für $n \times n$-Gitter (siehe Tutoraufgabe T19).