♡ Übung zur Vorlesung Parametrisierte Algorithmen ♡

Tutoraufgabe T12

Sei G ein Kreis mit n Knoten.

a) Wie sieht G_B aus?

b) Was sind die Mengen V_0 und C_0?

c) Wie gut ist die Problemkernreduktion, die auf dem Theorem von Nemhauser und Trotter basiert, in diesem Fall?

Beantworten Sie dieselben Fragen für eine Clique mit n Knoten.

Lösungsvorschlag

Aus einem Kreis ungerader Länge wird ein Kreis der doppelten Länge. Da dieser also gerade Länge hat, ist damit $C_0 = \emptyset$ während V_0 alle Knoten enthält. Aus einem Kreis gerader Länge werden zwei Kreise. Da für jeden dieser Kreis zwei gleich gute Vertex Cover existieren, sind unterschiedliche Lösungen für C_0 und V_0 möglich. Entweder ist wieder $C_0 = \emptyset$ und $V_0 = V$ oder $V_0 = \emptyset$ und $C_0 = V$. Die Problemkernreduktion reduziert den Graphen im allgemeinen also nicht.

Für eine Clique mit n Knoten besteht G_B aus dem vollständigen Bipartiten Graphen mit n Knoten in jeder der Mengen. Ein optimales Veretx Cover muss dann genau eine der beiden Seiten enthalten. Somit gilt auch hier $C_0 = \emptyset$ und $V_0 = V$.

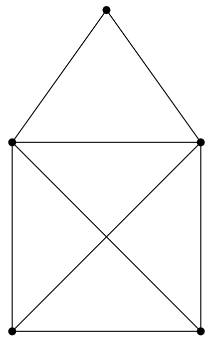
Tutoraufgabe T13

Beweisen Sie folgende Aussage aus der Vorlesung: VERTEX COVER kann auf bipartiten Graphen in polynomieller Zeit gelöst werden.

Lösungsvorschlag

Sei G ein bipartiter Graph, M ein Matching maximaler Kardinalität und C ein minimales Vertex Cover. Ein maximales Matching kann leicht berechnet werden. Es gilt $|C| = |M|$ nach dem Satz von Kőnig. Beweise für diesen wichtigen Satz findet man im WWW, in diesem Fall sogar korrekt in Wikipedia (Englisch). Der Beweis ist konstruktiv und liefert daher ein minimales Vertex Cover.

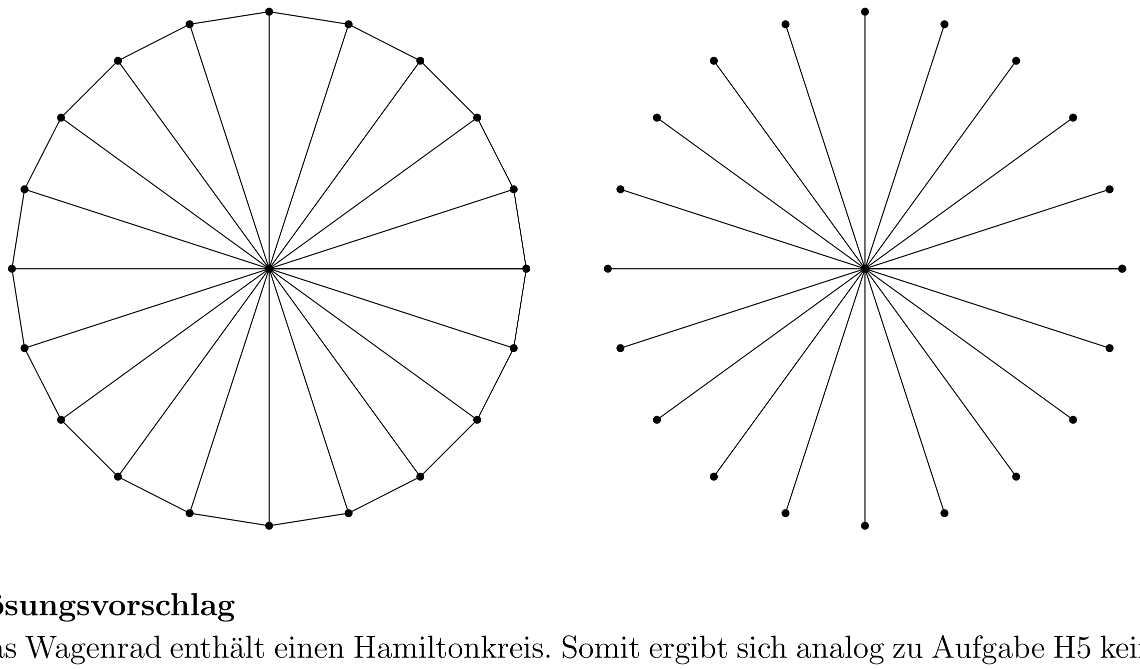
Hausaufgabe H7
Bringt die Problemkernreduktion etwas für das *Haus des Nikolaus*?



Geben Sie eine interessante hinreichende Bedingung an, die eine erfolgreiche Anwendung von Nemhauser/Trotter verhindert.

Lösungsvorschlag
Sobald ein Graph einen Hamiltonkreis ungerade Länge enthält, erhalten wir in B_G ebenfalls einen Hamiltonkreis. Von diesem Kreis müssen mindestens die Hälfte aller Knoten in das Vertex Cover übernommen werden. Wir können also einfach eine der beiden Seite als Vertex Cover übernehmen. Dann ist automatisch $C_0 = \emptyset$, und die Anwendung von Nemhauser/Trotter nicht erfolgreich.
Da das Haus vom Nikolaus diese Bedingung erfüllt, wird auf diesem Graph keine Reduktion ausgeführt.

Hausaufgabe H8
Was macht die Problemkernreduktion mit einem *Wagenrad* und einem *Stern*?



Lösungsvorschlag
Das Wagenrad enthält einen Hamiltonkreis. Somit ergibt sich analog zu Aufgabe H5 keine Reduktion.
Sei v der Mittelpunkt des Sternes. Aus einem Stern werden offensichtlich zwei Sterne. Ein optimales Vertex Cover wählt bei jedem Stern den Mittelpunkt v_1 bzw. v_2. Somit ist $C_0 = \{v\}$, $V_0 = \emptyset$ und damit ein optimales Vertex Cover gefunden.