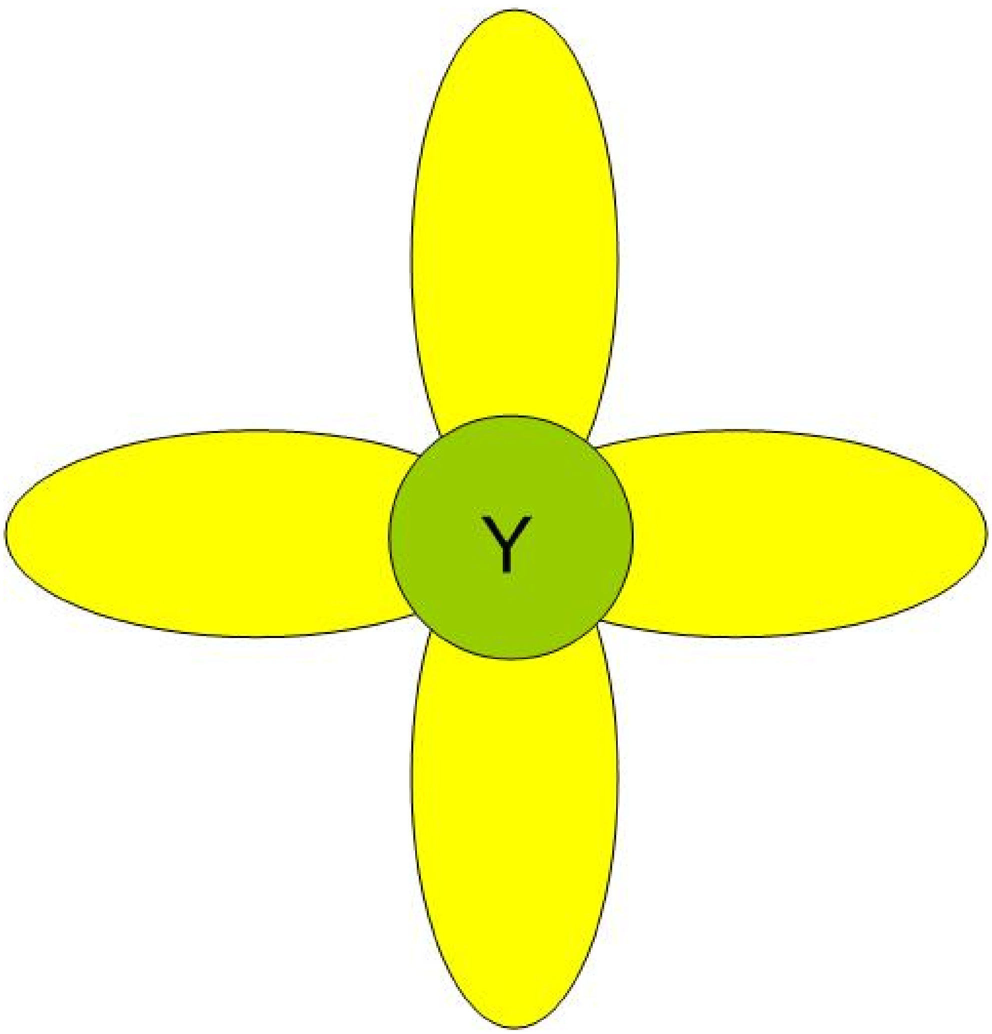
Sunflowers

Daniel Brammertz

6. Juni 2004



1 Einleitung

Sunflowers ist ein Kapitel aus dem Buch *Extremal Combinatorics* von Stasys Jukna. Das Kapitel gehört zum Themenbereich der *Extremalen Mengentheorie*; z.B. wird dabei Fragen nachgegangen, ab welcher Größe von Mengenfamilien gewisse regelmäßige Strukturen auftreten. Zu Anfang werden einige solche Strukturen vorgestellt, u.a. die dem Kapitel seinen Namen gebende *Sunflower*. Der anschließende Hauptteil besteht aus den Beweisen zu drei Lemmas, die unter bestimmten Vorraussetzungen das Auftreten solcher Strukturen vorhersagen.

Die *Extremale Mengentheorie* im Allgemeinen, und auch die hier vorgestellten Lemmas finden Anwendungen in der Komplexitätstheorie - insbesondere in der Schaltkreiskomplexität.

2 Strukturen

2.1 Weak Δ-System

Definition 1 *Sei* $\mathcal{F}$=$\{S_1,\ldots,S_m\}$ *eine Familie von Mengen.*
$\mathcal{F}$ *heißt* Weak Δ-System $\iff \exists\lambda\ \forall i \neq j\ \ |S_i \cap S_j| = \lambda$

Eine Mengenfamilie ist also genau dann ein *weak Δ-System*, wenn der paarweise Schnitt aller Mengen die selbe Größe hat.

Die Mengenfamilie $\mathcal{F} = \{\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{b,d,f\}\}$ ist z.B. ein *weak Δ-System* mit $\lambda = 1$

2.2 Sunflowers

Sunflowers (oder *Strong Δ-Systeme*) bilden eine Untermenge der *Weak Δ-Systeme.*

Definition 2 *Sei* $\mathcal{F}$=$\{S_1,\ldots,S_m\}$ *eine Familie von Mengen.*
$\mathcal{F}$ *heißt Δ-System (oder Sunflower) mit k Blättern und Kern Y*
$\iff \forall i \neq j\ \ S_i \cap S_j = Y\ \ \wedge\ \forall k\ \ S_k - Y \neq \emptyset$

Bei *Sunflowers* wird also nicht nur gefordert, dass der paarweise Schnitt aller Mengen die selbe Größe hat, sondern auch, dass dieser Schnitt identisch ist. Diesen eindeutigen paarweisen Schnitt Y bezeichnet man als *Kern*. Die Mengen $S_i - Y$ bezeichnet man als Blätter. Weiterhin ist es für eine *Sunflower* notwendig, dass die Blätter nicht leer sind, was gleichbedeutend mit der Bedingung ist, dass kein S_i dem Kern Y entspricht.

Die Mengenfamilie $\mathcal{F} = \{\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{b,f,g\}\}$ bildet z.B. eine *Sunflower* mit Kern $Y = \{a\}$ und den Blättern $\{b,c\},\{d,e\},\{f,g\}$. Das vorherige Beispiel zum *weak Δ-System* ist dagegen keine *Sunflower*. Ausserdem bildet jede disjunkte Mengenfamilie eine *Sunflower* mit Kern $Y = \emptyset$

Aus der Definition folgen folgende Eigenschaften, die jede *Sunflower* erfüllt:

- $\forall i \;\; S_i \supset Y$ (der Kern ist in allen S_i enthalten)
- $\forall i \neq j \;\; S_i - Y \cap S_j - Y = \emptyset$ (Alle Blätter sind paarweise disjunkt)
- $\nexists i \;\; S_i = Y$ (Es gibt keine leeren Blätter)

2.3 Flowers

Die allgemeinere *Flower* bildet wie das *Weak Δ-System* eine Obermenge der *Sunflowers*. Zur Definiton der *Flower* müssen zunächst einige weitere Begriffe eingeführt werden.

Definition 3 *Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen.*
Eine Menge B heißt Blocking-Set *von $\mathcal{F} \iff \forall i \;\; S_i \cap B \neq \emptyset$*

Definition 4 *Die* blocking number *$\tau(\mathcal{F})$ ist die Kardinalität einer kleinsten Menge, die ein* Blocking-Set *von $\mathcal{F}$ ist. Falls $\emptyset \in \mathcal{F}$ ist per Definition $\tau(\mathcal{F}) = 0$*

Definition 5 *Die* Restriction *$\mathcal{F}_B$ einer Familie $\mathcal{F}$ auf eine Menge B ist:*
$\mathcal{F}_B = \{S - B \;:\; S \in \mathcal{F}, S \supseteq B\}$

$\mathcal{F}_B$ enthält also alle Elemente aus $\mathcal{F}$ die eine Obermenge von B sind; wobei von diesen dann noch B abgezogen wird.

Definition 6 *Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen.*
$\mathcal{F}$ heißt Flower *mit k Blättern und Kern $Y \iff \tau(\mathcal{F}_Y) \geq k$*

Im Gegensatz zur *Sunflower* ist bei der *Flower* der Kern nicht durch die Definition spezifiziert. Der Kern Y kann also frei gewählt werden. Im Gegensatz zur *Sunflower* kann man aus der Anzahl der Blätter k auch nicht mehr schliessen, dass die Mengenfamilie $\mathcal{F}$ genau k Elemente hat, sondern nur noch, dass sie mindestens k Elemente hat.

Die Familie $\mathcal{F} = \{\{k, a, b\}, \{k, b, c\}, \{k, c, d\}, \{k, d, a\}\}$ ist z.B. eine *Flower* mit zwei Blättern und Kern $Y = \{k\}$, da $\tau(\mathcal{F}_Y) = \tau(\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}) = 2$. Auch die Familien $\mathcal{F} \cup a, b, c$ oder $\mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ wären *Flowers* mit zwei Blättern und Kern $Y = \{k\}$.

Da *Flowers* eine Obermenge der *Sunflowers* sind, gelten nicht unbedingt alle oben genannten Eigenschaften der *Sunflowers* auch für *Flowers*.

- $\mathcal{F}$ kann eine *Flower* sein, obwohl die $S_1 - Y, ..., S_m - Y$ nicht disjunkt sind
- $\mathcal{F}$ kann eine *Flower* sein, obwohl ein $S_i \not\supset Y$
- $\nexists i \;\; S_i = Y$

Die letzte Eigenschaft - die Nichtexistenz von leeren Blättern - gilt sowohl für *Sunflowers* als auch für *Flowers*. Bei *Sunflowers* war sie explizit durch die Definition sichergestellt; bei *Flowers* folgt diese Eigenschaft aus der Definition der *Blocking-Number* für Familien, die die leere Menge enthalten.

3 Das Sunflower Lemma

Das Sunflower-Lemma besagt nun, daß eine s-uniforme [1] Mengenfamilie ab einer bestimmten Größe eine Sunflower mit einer vorgegebenen Anzahl an Blättern enthalten muss.

Lemma 1 *Sei* $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ *eine Familie von Mengen mit* $\forall i\, |S_i| = s$.
$|\mathcal{F}| > s!(k-1)^s \implies \mathcal{F}$ enthält *eine* Sunflower *mit k Blättern*

Beweis Der Beweis des Lemmas erfolgt durch Induktion über s(also die Größe der Mengen)

Induktionsanfang: Für s=1 ist zu zeigen: $|\mathcal{F}| \geq k \implies \mathcal{F}$ enthält eine Sunflower mit k Blättern. Da $\mathcal{F}$ selber auch eine Menge ist, sind alle Mengen in $\mathcal{F}$ verschieden. Weil wegen s=1 die Kardinalität der Mengen eins ist, müssen alle Mengen disjunkt sein. Daher können k beliebige Mengen aus $\mathcal{F}$ ausgewählt werden, die mit dem Kern $Y = \emptyset$ eine *Sunflower* bilden. $\surd$

Induktionsschritt: Sei $\mathcal{A} = \{A_1, ...A_t\}$ eine maximale paarweise disjunkte Familie aus $\mathcal{F}$. Falls $t \geq k$ können k beliebige Mengen aus $\mathcal{A}$ ausgewählt werden, die mit dem Kern $Y = \emptyset$ eine *Sunflower* bilden. $\surd$

Sei daher nun $t < k$ und

$$B = \bigcup_{1 \leq i \leq t} A_i$$

. Die Kardinalität von B läßt sich abschätzen durch $|B| \leq s(k-1)$. Diese Menge B muss jede Menge aus $\mathcal{F}$ schneiden, da ansonsten $\mathcal{A}$ nicht maximal disjunkt gewesen wäre. Nach dem Schubfachprinzip muss es ein $x \in B$ geben, dass in mindestens

$$\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{s!(k-1)^s}{s(k-1)} = (s-1)!(k-1)^{(s-1)}$$

Mengen aus $\mathcal{F}$ vorkommt. Die Familie

$$\mathcal{F}_x = \{S - \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$$

ist $(s-1)$-uniform und hat mindestens die Größe $(s-1)!(k-1)^{(s-1)}$. Durch Anwendung der Induktionsvorraussetzung auf $\mathcal{F}_x$ erhält man eine *Sunflower* in $\mathcal{F}_x$ mit k Blättern. Durch Hinzufügen von {x} zu allen Mengen dieser *Sunflower* erhält man eine *Sunflower* aus $\mathcal{F}$ $\square$

Es ist nicht bekannt, ob die durch das Sunflower-Lemma bekannte Schranke minimal ist. Jedoch ist eine untere Schranke bekannt, unterhalb derer es nicht zwangsläufig eine *Sunflower* geben muss. Diese ist in Lemma 2 zu sehen, und wird hier nicht bewiesen.

Definition 7 *Sei* $f(s, k)$ *die kleinste Größe für eine* s-uniforme *Mengenfamilie, ab der sie eine* Sunflower *mit k Blättern enthalten muss.*

Lemma 2 $(k-1)^s < f(s, k) \leq s!(k-1)^s + 1$

[1] d.h. alle Mengen haben genau die Kardinalität s

4 Das Flower Lemma

Lemma 3 *Sei* $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ *eine Familie von Mengen mit* $\forall i\, |S_i| \; = s$
$|\mathcal{F}| > (k-1)^s \implies \mathcal{F}$ enthält *eine* Flower *mit k Blättern*

Beweis Auch dieser Beweis erfolgt durch Induktion über s

*Induktionsanfang:*Für s=1 ist zu zeigen: $|\mathcal{F}| \geq k \implies \mathcal{F}$ enthält eine *Flower* mit k Blättern. Da wegen s=1 die Kardinalität der Mengen eins ist, müssen alle Mengen disjunkt sein. Daher können k beliebige Mengen aus $\mathcal{F}$ ausgewählt werden, die mit dem Kern $Y = \emptyset$ eine *Flower* bilden. $\surd$

*Induktionsschritt:*Falls $\tau(\mathcal{F}) \geq k$, dann ist $\mathcal{F}$ eine Flower mit mindestens k Blättern und Kern $Y = \emptyset$ $\surd$

Sei daher nun $\tau(\mathcal{F}) < k$, was bedeutet, dass es eine Menge B mit $|B| = (k-1)$ gibt die alle Mengen aus $\mathcal{F}$ schneidet. Nach dem Schubfachprinzip muss es ein $x \in B$ geben, das in mindestens

$$\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{(k-1)^s}{k-1} = (k-1)^{(s-1)}$$

Elementen aus $\mathcal{F}$ vorkommt. Die Familie

$$\mathcal{F}_x = \{S - \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$$

ist $(s-1)$-uniform und hat mindestens die Größe $(k-1)^{(s-1)}$. Durch Anwendung der Induktionsvorraussetzung auf $\mathcal{F}_x$ erhält man eine *Flower* in $\mathcal{F}_x$ mit k Blättern und einem Kern Y. Durch Hinzufügen von {x} zu allen Mengen dieser *Flower* erhält man eine *Flower* aus $\mathcal{F}$ mit neuem Kern $Y_{new} = Y \cup \{x\}$ $\square$

5 Der Satz von Füredi

Der Satz von Füredi sagt aus, dass in einer hinreichend großen Mengenfamilie $\mathcal{F}$ eine Teilmenge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ vorgegebener Mächtigkeit gibt, deren vereinigter paarweiser Schnitt kleiner ist als die größte Menge in $\mathcal{F}$.

Definition 8 *Der* common part *einer Familie* $\mathcal{F} = \{S_1, ...S_k\}$ *ist* $Y(\mathcal{F}) = \bigcup_{i \neq j} (S_i \cap S_j)$

Lemma 4 *Sei* $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_k\}$ *eine Familie von Mengen mit* $\forall i \;\; |S_i| \leq s$.
$|\mathcal{F}| > k^s \implies$ *es gibt eine Teilmenge von* $\mathcal{F}$ *der Mächtigkeit* $k+1$ *mit einem* common part *der weniger als s Elemente hat.*

Beweis Der Beweis erfolgt durch gleichzeitige Induktion über k und s. Das heisst im Induktionsschritt wird die Behauptung für beliebige k und s auf eine Behauptung über ein $k_0 < k$ und ein $s_0 < s$ zurückgeführt; so dass die Behauptung für jedes k und s auf den Induktionsanfang mit k=1 und s=1 zurückführt.

Induktionsanfang: Für s=1 und k=1 ist zu zeigen: $|\mathcal{F}| > 1 \Longrightarrow 2$ Elemente aus $\mathcal{F}$ haben einen *common part* der kleiner als 1 ist. Da wegen s=1 die Mengen aus $\mathcal{F}$ disjunkt sind, ist ihr *common part* die leere Menge. $\surd$

Induktionschritt O.B.d.A. kann man annehmen, daß es ein $B_0 \in \mathcal{F}$ mit $|B_0| = s$ gibt. Man defininiert:

$$\mathcal{F}(B) = \{S - B \ : \ S \in \mathcal{F}, S \cap B_0 = B\} \quad \text{für} \quad B \subseteq B_0$$

Es muss nun ein $E \subseteq B_0$ mit $|\mathcal{F}(E)| > (k-1)^{s-|E|}$ existieren. Denn ansonsten wäre

$$|\mathcal{F}| = \sum_{B \subseteq B_0} |\mathcal{F}(B)| = \sum_{i=0}^{s} \sum_{B \subseteq B_0 \wedge |B|=i} |\mathcal{F}(B)| \leq \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (k-1)^{s-i} = k^s$$

was ein Widerspruch zur Vorrausetzung $|\mathcal{F}| > k^s$ wäre. Auf die Menge $\mathcal{F}(E)$ kann nun die Induktionsvorrausetzung angewendet werden, wonach $\mathcal{F}(E)$ eine Teilmenge $\mathcal{A} = \{S_{i_1} - E, ..., S_{i_k} - E\}$ mit $|Y(\mathcal{A})| < (s - |E|)$ enthält. Um eine Teilmenge von $\mathcal{F}$ zu erhalten leitet man folgende Familie aus $\mathcal{A}$ ab: $\mathcal{A}' = \{S_{i_1}, ..., S_{i_k}, B_0\}$. Der *common part* von $\mathcal{A}'$ erhöht sich durch das Hinzufügen von E zu allen Mengen höchstens um $|E|$. Das Hinzufügen von B_0 zur Familie erhöht den *common part* nicht weiter, da $\forall\, 1 \leq z \leq k \quad B_0 \cap S_{i_z} = E$ gilt. Daher ergibt sich für den gesamten *common part* wie gefordert

$$|Y(\mathcal{A}')| \leq |Y(\mathcal{A})| + |E| < (s - |E|) + |E| = s \quad \Box$$