Das Schubfachprinzip

- wende das Schubfachprinzip auf der Graphentheorie an
- das Erdös-Szekeres-Theorem
- Turáns Theorem
- Swell-colored Graphen: das Theorem von Ward-Szabó

Das Schubfachprinzip

(engl. Pigeonhole principle)

Wenn man *mehr* als kn Elemente auf n Fächer verteilt, so gibt es *mindestens* ein Fach, das *mehr* als k Elemente enthält.

***Beweis*:**

- Jedes Fach enthält ***maximal*** **k** Elemente
- dann gibt es insgesamt ***höchstens*** **kn** Elemente
- Widerspruch zu der Existenz von **mehr** als **kn** Elementen □

Behauptung 1: **In jedem Graph existieren immer 2 Knoten mit dem gleichen Grad.**

Beweis:

- ***Grad***: Der Grad von einem Knoten x bezeichnet die Anzahl $d(x)$ der Kanten von G, die zu x inzident sind
- ein Graph mit n Knoten
- markiere die **n Fächer** mit den Zahlen 0 bis n**-**1
- der Knoten x liegt in dem k-ten Schubfach, wenn er genau den Grad k hat
- Ziel des Beweises: es gibt ein Fach, das mehr als einen Knoten enthält

Behauptung 1: **In jedem Graph existieren immer 2 Knoten mit dem gleichen Grad.**

Beweis:

- Annahme**: es gibt kein solches Fach, das mehr als einen Knoten hat.**
- Es gibt n Fächer und n Elemente
- Sei Knoten x im Fach 0 (Grad 0)
- Sei Knoten y im Fach n-1 (Grad n-1)
- y ist mit übrigen Knoten verbunden, inklusive x
- x ist nicht mit anderen Knoten verbunden, inklusive y. $\rightarrow$Widerspruch $\square$

Definitionen 1

Sei G ein endlicher Graph.

- ***independence number***: Die ***independence number*** α**(G)** ist die **maximale** Anzahl von paarweise nicht adjazenten Knoten von G.
- ***chromatic number***: Die ***chromatic number*** χ**(G)** ist die **minimale** Anzahl der Farben von den Knoten des Graphs G mit der Eigenschaft, dass paarweise adjazente Knoten unterschiedliche Farben haben.

***Behauptung 2*:** **Für jeden Graph G mit n Knoten gilt immer, dass n $\leq \alpha$(G) $\cdot\ \chi$(G)**

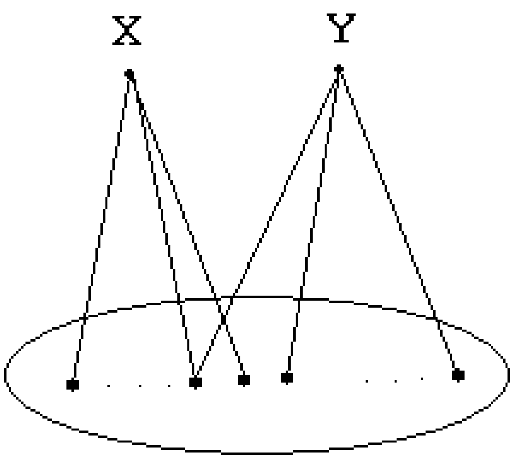
Beweis:

- verteile die n Knoten von G auf χ**(G)** Farbklassen
- Klassen von Knoten mit der gleichen Farbe bilden
- eine Farbklasse hat mindestens **n / χ(G)** Knoten
- diese Knoten sind paarweise nicht adjazent
- daraus folgt α**(G)** $\geq$ **n / χ(G)** □

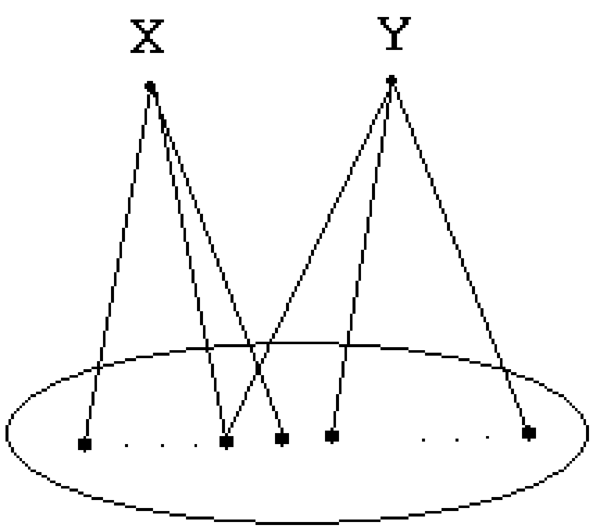
Behauptung 3: Sei G ein Graph mit n Knoten. G ist zusammenhängend, wenn jeder Knoten einen Grad von mindestens (n-1)/2 hat. ($\Leftarrow$)

Beweis:

- ***zusammenhängend*** (engl. connected), wenn für jedes Paar von Knoten u und v ein (u-v)-Pfad in G existiert
- wähle beliebig 2 Knoten x und y
- seien x und y nicht adjazent
- d(x) und d(y) mindestens (n-1)/2



- Es existiert mindestens n-1 Kanten, die die Knoten x und y mit den übrigen Knoten verbinden.
- Anzahl der übrigen Knoten ist n-2
- Verteile ≥ **n-1** Elemente auf **n-2** Fächer
- Es gibt mindestens ein Fach, das ≥ **2** Elemente enthält.
- Das Schubfachprinzip impliziert: ein Knoten davon muss zu **x** und **y** adjazent sein
- für alle **x** und **y**, jedes Paar von Knoten ist entweder adjazent oder hat einen gemeinsamen Nachbarn
- G ist zusammenhängend □



Definitionen 2

- Sei $A = (a_1, \ldots, a_n)$ eine ***Folge*** mit n **verschiedenen** Zahlen.
- Eine ***Teilfolge*** mit k Zahlen aus Folge A ist eine Folge B mit k verschiedenen Zahlen aus A, die in gleicher Reihenfolge genau so wie in Folge A erscheinen:
  $B = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$, wobei $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.
- Eine Teilfolge *B* ist steigend, wenn $a_{i1} < a_{i2} < \ldots < a_{ik}$.
- Eine Teilfolge *B* ist fallend, wenn $a_{i1} > a_{i2} > \ldots > a_{ik}$.
- Das Erdös-Szekeres-Theorem war eins der ersten Resultate in extremal combinatorics.

Das Erdös-Szekeres-Theorem

Sei A = ($a_{1,}$ ... $_{,}a_n$) eine Folge mit n verschiedenen reelen Zahlen. Wenn n ≥ sr + 1, dann besitzt A entweder eine steigende Teilfolge mit s+1 Zahlen oder eine fallende Teilfolge mit r+1 Zahlen (oder beides).

***Beweis (Seidenberg 1959)*:**

- ordne jeder Zahl a_i aus Folge A ein Paar Punkte (x_i , y_i) zu
- x_i ist die Länge der längsten steigenden Teilfolge mit der **Endung** a_i.
- y_i ist die Länge der längsten fallenden Teilfolge mit dem **Anfang** a_i.

Das Erdös-Szekeres-Theorem

- $\mathbf{(\, x_i \,,\, y_i \,) \neq (\, x_j \,,\, y_j \,)}$**, wenn** $\mathbf{i \neq j}$**.**

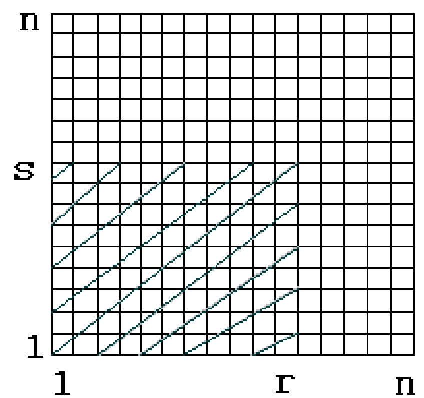
Beweis: Wir haben ... a_i ... a_j ...

(1) entweder $\mathbf{a_i < a_j}$: die längste steigende Teilfolge mit der Endung a_i kann erweitert werden, wobei wir ein a_j am Ende der Teilfolge einfügen. (damit $x_i < x_j$)

(2) oder $\mathbf{a_i > a_j}$: die längste fallende Teilfolge mit dem Anfang a_j kann erweitert werden, wobei wir ein a_i am Anfang der Teilfolge einfügen. (damit $y_i > y_j$)

Das Erdös-Szekeres-Theorem

- setze jede Zahl a_i in das Schubfach mit den Koordinaten (x_i , y_i) ein
- Jede Zahl kann in ein Fach eingesetzt werden, weil
  $1 \leq x_i , y_i \leq n$ für alle $i = 1, ... , n$.
- Kein Schubfach darf mehr als eine Zahl enthalten, weil
  $(x_i , y_i) \neq (x_j , y_j)$ wenn $i \neq j$.
- $|A| = n$ und $n \geq sr+1$
- mehr Elemente aus Folge A als schraffierte Fächer
- a_i aus Folge A befindet sich im
  nicht schraffierten Bereich
- entweder $x_i \geq s+1$ oder $y_i \geq r+1$
  (oder beides) $\square$



Turáns Theorem

Definition*:** Eine ***k-Klique ist ein Graph mit k Knoten, wobei alle Knoten paarweise durch eine Kante verbunden sind.

***Turáns Theorem (Paul Turán, 1941)*:** Falls ein Graph G = (V , E) mit n Knoten keine (k+1)-Klique hat, wobei k ≥ 2, dann $|E| \leq (1 - \frac{1}{k})\frac{n^2}{2}$.

Beweis: Mittels vollständiger Induktion für $n \in N$:

(1) Induktionsanfang: Es ist klar, dass die Aussage für n = 1 wahr ist.

Turáns Theorem

(2) Induktionsschritt: Sei die Aussage bis n-1 wahr.

- G = (V , E) ein Graph mit n Knoten, ohne (k+1)-Klique und mit einer **maximalen** Anzahl von Kanten.
- G enthält sicher eine k-Klique.
- Sei A diese k-Klique. Sei B = V-A , |B| = n-k
- die Anzahl der Kanten von A ist $e_A = \binom{k}{2}$
- für die Anzahl der Kanten in B gilt $e_B \leq (1 - \frac{1}{k})\frac{(n-k)^2}{2}$
- für die Anzahl der Kanten zwischen A und B gilt

$$e_{A,B} \leq (k-1)(n-k)$$

Turáns Theorem

$$|E| \leq e_A + e_B + e_{A,B} \leq \binom{k}{2} + \binom{k}{2}\left(\frac{n-k}{k}\right)^2 + (k-1)(n-k)$$

$$= \binom{k}{2} + \binom{k}{2}\left(\frac{n-k}{k}\right)^2 + \binom{k}{2}\frac{2}{k}(n-k)$$

$$= \binom{k}{2}\left(1 + \frac{n-k}{k}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2}$$

(3) Induktionsschluss: Mit Hilfe der vollständigen Induktion folgt aus (1) und (2): die Aussage ist für alle n richtig. □

Swell-colored Graphen

- ***Definition 1***: Ein ***vollständiger*** Graph K_n besteht aus n Knoten, die alle paarweise mit einander verbunden sind.
- ***Definition 2***: Ein vollständiger Graph ist ***swell-colored*****,** wenn man die Kanten so färben kann, dass jedes Dreieck genau 1 oder 3 Farben hat und wenn dieser Graph mehr als eine Farbe besitzt.

Beispiel: K_3 und K_4 swell-colored mit 3 Farben.

Swell-colored Graphen

***Theorem* (Ward-Szabó 1994): Der vollständige Graph mit n Knoten kann nicht swell-colored sein mit weniger als $\sqrt{n}$ + 1 Farben.**

***Beweis*:**

- Sei K_n swell-colored mit r verschiedenen Farben.
- N(x, c): die Anzahl der Kanten inzident zum Knoten x, welche die Farbe c haben
- wähle x_0 , c_0 fest, wobei $N(x_0, c_0)$ maximal ist
- $N(x_0, c_0) =: N$

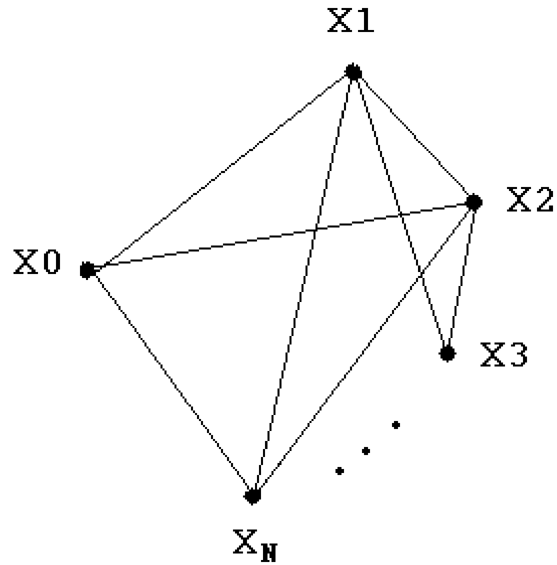
Swell-colored Graphen

***Theorem (Ward-Szabó 1994)*: Der vollständige Graph mit n Knoten kann nicht swell-colored sein mit weniger als $\sqrt{n} + 1$ Farben.**

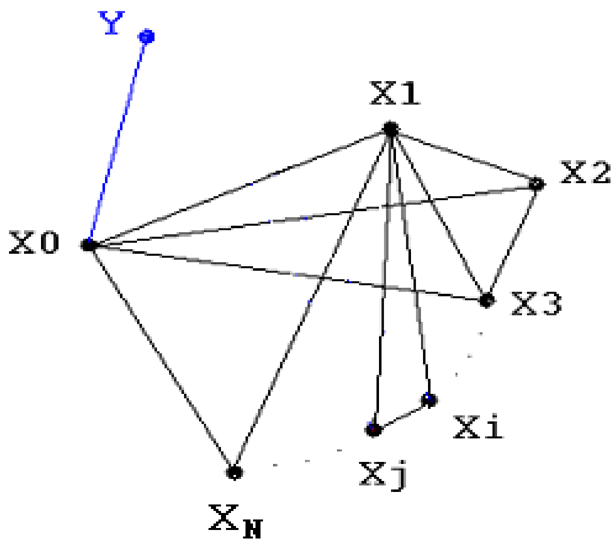
***Beweis*:**

- ordne die n-1 zum Knoten x_0 inzidenten Kanten nach Farben in $\leq r$ Farbklassen ein
- Jede Farbklasse besitzt N oder weniger Kanten, die zu x_0 inzident sind:

$$\mathbf{N \cdot r \geq n - 1}$$



- Seien x_1 , ... , x_N die Nachbarn von x_0, die durch Kanten mit Farbe c_0 mit x_0 verbunden sind.
- G = (V , E) ist der vollständige Teilgraph von K_n , wobei $V = \{ x_0 , x_1 , ... , x_N \}$
- G swell-colored
- alle Kanten von G haben Farbe c_0



- K_n hat mindestens 2 Farben
- wähle einen Knoten **y** aus K_n, der nicht in G liegt
- Es ergibt sich die folgende Eigenschaft des Knotens y:

  Mindestens eine Kante, die den Knoten y mit dem Teilgraph G verbindet, hat eine andere Farbe als c_0.

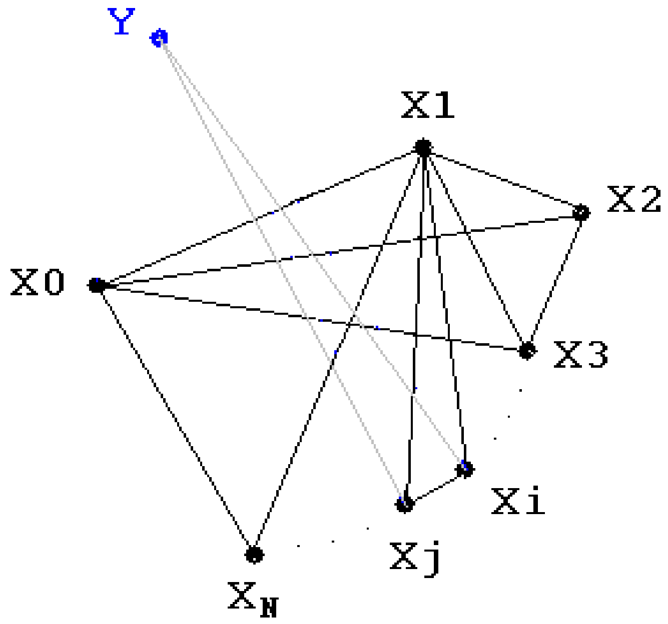
Behauptung**: Jede der N+1 Kanten, mit welchen y und G verbunden sind, hat eine von anderen Kanten verschiedene Farben. Und diese Farben von den N+1 Kanten sind andere als c_0.**

Beweis**:**

- aus $r \geq N+2 \ \rightarrow \ N \leq r-2$ und $N \cdot r \geq n-1$
- folgt: $\mathbf{r \geq \sqrt{n} + 1}$
- genau was wir wünschen für den Satz
- Es bleibt uns noch übrig, diese Behauptung zu beweisen.

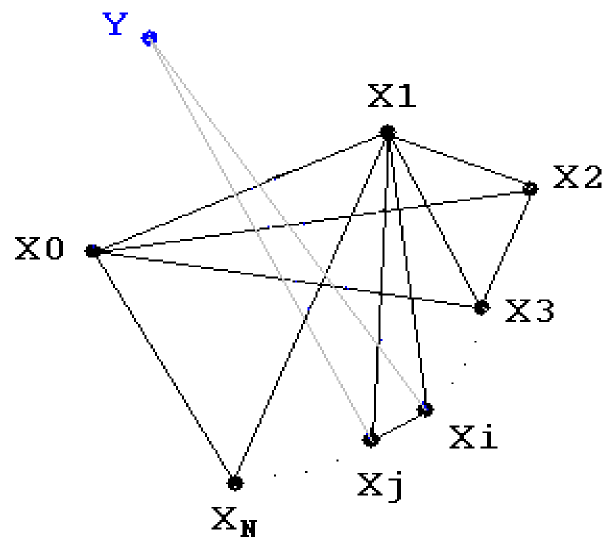
Zuerst die zweite Aussage: **Die Farben von der N+1 Kanten sind andere als c_0.**

- für alle $0 \le i, j \le N$: $\{x_i, x_j\}$ hat die Farbe c_0
- wenn $\{y, x_i\}$ auch die Farbe c_0 hat
- dann hat $\{y, x_j\}$ auch die Farbe c_0
- Widerspruch zur Eigenschaft des Knotens y



Jetzt die erste Aussage: **Jede der N+1 Kanten hat eine von anderen Kanten verschiedene Farbe.**

- Annahme: beliebige 2 Kanten $\{y, x_i\}$, $\{y, x_j\}$ haben die gleiche Farbe f
- Wegen der swell-coloredness von K_n: $\{x_i, x_j\}$ hat die gleiche Farbe, nämlich f
- $\{x_i, x_j\}$ hat die Farbe c_0 ($f = c_0$) $\rightarrow$ $\{y, x_i\}$ hat auch die Farbe c_0
- Widerspruch zu der zweiten Aussage $\square$



Ich bedanke mich für eure Aufmerksamkeit!