Abzählen

Im Rahmen des Seminars
Extremal Combinatorics

Anna Lea Dyckhoff

23. April 2004

1 Abzählen – Fortgeschrittenes Abzählen

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit dem Abzählen von Elementen. Dabei versucht man Strategien, Methoden und Formeln zu finden, statt wirklich die einzelnen Elemente zu zählen.

Im Folgenden werden fünf Beweise aus den Kapiteln 1 und 2 – *Abzählen* und *Fortgeschrittenes Abzählen* – des Buches *Extremal Combinatorics* von Stasys Jukna näher erläutert. Anhand dieser Erläuterungen sollen verschiedene Methoden des Abzählens exemplarisch dargestellt werden.

1.1 Zählen von Partitionen

Definition 1.1 *Eine Partition einer Menge A ist eine Menge $\mathcal{P}$ nicht-leerer Teilmengen von A, die paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung gleich A ist. Man nennt die Elemente von $\mathcal{P}$ die Blöcke der Partition.*

$$A = A_1 \uplus A_2 \uplus \cdots \uplus A_n$$

Satz 1.1 *Sei $S(n; k_1, k_2, \ldots, k_n)$ die Anzahl aller Partitionen auf einer n-elementigen Menge mit k_i i-elementigen Blöcken ($i = 1, \ldots, n; k_1+2k_2+\cdots+nk_n = n$). Es gilt:*

$$S(n; k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!(1!)^{k_1} \cdots (n!)^{k_n}}$$

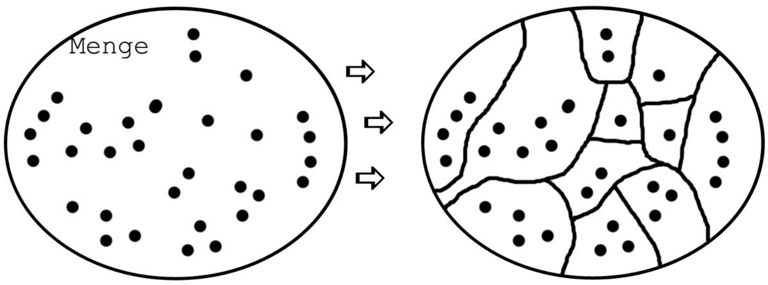

Abbildung 1: Als Beispiel hier eine mögliche Partition auf einer 31-elementigen Menge für $S(31; 3, 2, 2, 3, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ als gesuchte Anzahl.

Beweis zu Satz 1.1: Wir haben eine n-elementige Menge $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$. Eine Möglichkeit eine Partition mit k_i i-elementigen Blöcken zu erstellen ist, dass wir die Elemente der Menge A in eine beliebige Reihenfolge bringen. Nun haben wir genau eine Permutation von A. Dann betrachten wir die ersten k_1 Elemente der Permutation als 1-elementige Blöcke, die nächsten $2k_2$ Elemente als 2-elementige Blöcke, usw. ... bis zu nk_n n-elementigen Blöcken. Nun haben wir eine der Partitionen gefunden.

Um die Anzahl aller der im Satz 1.1 beschriebenen Partitionen zu erhalten, betrachtet man alle Permutationen der Menge A, und teilt jede, wie oben beschrieben, in eine Partition mit k_i i-elementigen Blöcken. Es gibt $n!$ verschiedene Permutationen. Innerhalb der Anzahl $n!$ sind jedoch viele Partitionen mehrmals enthalten, weil die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Blöcke berücksichtigt wird, sowie die Reihenfolge der i-elementigen Blöcke untereinander. Wir müssen nur die Vielfachheit jeder Partition kennen und $n!$ durch diese teilen, um $S(n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ zu bekommen.

Es gibt $i!$ Möglichkeiten, die Elemente innerhalb eines i-elementigen Blocks anzuordnen und k_i i-elementige Blöcke. Also gibt es $(i!)^{k_i}$ Möglichkeiten, die Elemente innerhalb der i-elementigen Blöcke zu ordnen. Die Anzahl der Möglichkeiten, die i-elementigen Blöcke untereinander zu sortieren ist $k_i!$. Also ist die Vielfachheit einer Partition gleich $k_1! \cdots k_n!(1!)^{k_1} \cdots (n!)^{k_n}$. □

1.2 Das Handshaking-Lemma

Das Standardbeispiel für die Methode des doppelten Abzählens wird durch das Handshaking-Lemma beschrieben: Auf einer Party treffen sich eine endliche Anzahl Partybesucher. Einige der Gäste geben sich die Hand. Dabei schüttelt keiner seine eigene, und niemand gibt einer anderen Person mehrmals die Hand.

Wir können diese Situation auf eine Matrix, deren Einträge Nullen und Einsen sind, übertragen.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Hierfür nummerieren wir alle Partybesucher von 1 bis n. Da die Anzahl der Partybesucher gleich n ist, erhalten wir eine Matrix $M \in \{0,1\}^{n \times n}$. Jede Zeile repräsentiert einen Besucher. Eine Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bedeutet, dass sich Gast i und Gast j die Hand geben. Um die Anzahl aller gegeben Handpaare zu berechnen, können wir die Einsen zeilenweise oder spaltenweise addieren, und bekommen jeweils das gleiche Ergebnis. Dieses Ergebnis halbiert ergibt die Summe aller gegebenen Handpaare, denn alle Gästepaare werden aufgrund der Symmetrie der Matrix M zweimal berücksichtigt. Sei r_i die Anzahl der Einsen in der i-ten Zeile, und c_j die Anzahl der Einsen in der j-ten Spalte. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{j=1}^{m} c_j = \underbrace{\text{Gesamtanzahl von Einsen in M}}_{\text{Anzahl aller gegebenen Handpaare } \times \text{Zwei}}$$

Lemma 1.1 *(Handshaking-Lemma) Auf einer Party ist die Zahl der Gäste, die eine ungerade Anzahl von Händen schütteln, gerade.*

Beweis zu Lemma 1.1: Seien $P_1, \ldots, P_n$ die Partygäste. Seien (P_i, P_j) Paare, wobei P_i und P_j sich die Hand geben. Sei x_i die Anzahl der Leute mit denen P_i Hände schüttelt, und y die Summe aller geschüttelten Handpaare, die auftreten. So ist einerseits die Anzahl dieser Paare $\sum_{i=1}^{n} x_i$, weil für jedes P_i die Anzahl der gebebenen Hände gleich x_i ist. Andererseits ergibt jeder Handschlag zwei Paare (P_i, P_j) und (P_j, P_i), so dass die Gesamtzahl von Einsen $2y$ ist. Also ist $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2y$, das heisst gerade.

Aber, wenn die Summe von n Zahlen gerade ist, dann ist eine gerade Anzahl der Zahlen ungerade. Daraus folgt, dass die Zahl der Gäste auf einer Party, die eine ungerade Anzahl von Händen schütteln, gerade ist. Wir erhalten nämlich immer eine ungerade Lösung, wenn wir eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen mit irgendeiner geraden Zahl addieren. □

1.3 Zwei Ungleichungen

Für den nächsten Beweis muss der Begriff der Konvexität einer Funktion bekannt sein. Im geometrischen Sinne ist eine Funktion konvex, wenn ihr Graph nach unten gewölbt ist. Anders ausgedrückt: Wenn wir eine Gerade l durch die Funktionswerte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ zeichnen, dann muss die Kurve $f(z)$ des Graphes unter $l(z)$ liegen für alle $z \in [x, y]$.

Definition 1.2 *Eine Funktion $f(x)$ ist konvex, falls für $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \text{ und } f''(x) \geq 0.$$

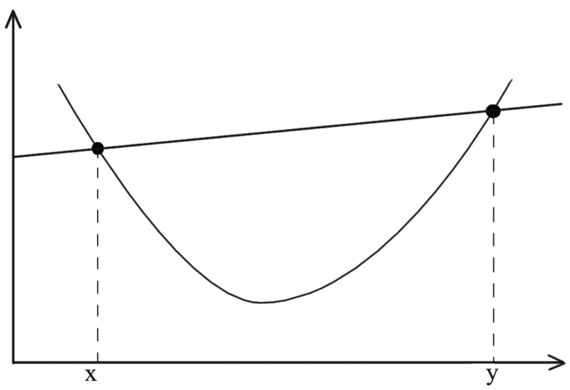

Abbildung 2: Beispiel eines konvexen Graphs.

Satz 1.2 *(Jensens Ungleichung) Falls $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=i}^{r} \lambda_i = 1$ und f konvex* *ist, dann gilt*

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i).$$

Beweis zu Satz 1.2: Diese Aussage lässt sich leicht durch einfache Induktion über die Anzahl der Summanden r beweisen. Für $r = 2$ ist die Behauptung wahr, denn

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass die Ungleichung aus Satz 1.2 für die Anzahl der Summanden bis r gültig ist, und beweisen sie im Weiteren für $r+1$. Dazu genügt es, die Summe der ersten zwei Terme von $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{r+1} x_{r+1}$ durch $(\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x_2\right)$ zu ersetzen, und die Induktionshypothese anzuwenden:

Umformung von $r+1$ auf r:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i x_i\right) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \cdots + \lambda_r x_r + \lambda_{r+1} x_{r+1}) \\
&= f\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_1 x_1 + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{r+1} x_{r+1}\right) \\
&= f(\underbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}_{\lambda_1'}\underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x_2\right)}_{x_1'} + \cdots + \underbrace{\lambda_{r+1} x_{r+1}}_{\lambda_r' x_r'}) \\
\text{(Induktions-} \quad &= f(\lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' + \cdots + \lambda_r' x_r') \\
\text{hypothese)} \quad &\leq \lambda_1' f(x_1') + \lambda_2' f(x_2') + \cdots + \lambda_r' f(x_r') \\
&= (\lambda_1+\lambda_2) f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x_2\right) + \cdots + \lambda_{r+1} f(x_{r+1}) \\
\text{(Konvexität)} \quad &\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_{r+1} f(x_{r+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i f(x_i). \square
\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung, die bewiesen werden soll, ist die folgende.

Satz 1.3 *Seien $a_1, \ldots, a_n$ nicht-negative Zahlen, dann gilt*

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Beweis zu Satz 1.3 Sei $f(x) = 2^x$, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ und $x_i = \log_2 a_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Mit Jensens Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \\
&\geq f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \\
&= 2^{(\sum \lambda_i x_i)} \\
&= 2^{(\sum \log_2 a_i)\frac{1}{n}} \\
&= (2^{\log_2 a_1} \cdot 2^{\log_2 a_2} \cdots 2^{\log_2 a_n})^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}. \square
\end{aligned}$$

1.4 Cliquen in bipartiten Graphen

Wieviele Einsen kann eine Matrix $M \in \{0,1\}^{n \times n}$ höchstens enthalten, wenn sie keine Teilmatrizen $\in \{1\}^{a \times b}$ enthält? Diese Fragestellung wurde als Problem von Zarankiewicz bekannt, weil dieser es für $a = b = 3$ und $n = 4, 5, 6$ als Aufgabe stellte.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & ? \\ 1 & ? & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & ? & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ ? & 1 & ? & 0 & ? \end{pmatrix}$$

Es lohnt sich, dieses Problem in den Bereich der bipartiten Graphen zu übertragen.

Definition 1.3 *Ein Graph heißt bipartit falls sich seine Knoten in zwei disjunkte n-elementige Teilmengen V_1 und V_2 aufteilen lassen, so dass es zwischen den Knoten innerhalb einer Teilmenge keine Kanten gibt, also $E \subseteq V_1 \times V_2$ die Menge der Kanten ist. Ein bipartiter Graph ist ein Tripel $G = (V_1, V_2, E)$.*

Definition 1.4 *Man sagt, der bipartite Graph enthält eine $a \times b$-Clique, wenn darin eine a-elementige Teilmenge $A \subseteq V_1$ und eine b-elementige Teilmenge $B \subseteq V_2$ existieren, so dass $A \times B \subseteq E$.*

Sei $k_a(n)$ die kleinste natürliche Zahl k, so dass jeder bipartite Graph mit $|V_1| = |V_2| = n$ und $|E| > k$ mindestens eine $a \times a$-Clique enthält. Es kann gezeigt werden, dass

$$k_a(n) \geq c \cdot n^{2-\frac{2}{a}},$$

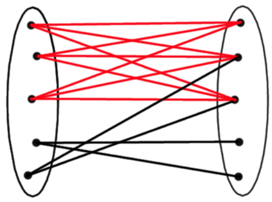

Abbildung 3: (3×3)-Clique in bipartitem (5×5)-Graph.

wobei $c > 0$ eine Konstante ist, die nur von a abhängt. Tatsächlich ist diese untere Schranke nah an der bestmöglichen Grenze, und dies kann mit der Methode des doppelten Abzählens bewiesen werden.

Theorem 1.1 *Für $n, a \in \mathbf{N}$ gilt*

$$k_a(n) \leq (a-1)^{\frac{1}{a}} n^{2-\frac{1}{a}} + (a-1)n.$$

Beweis zu Theorem 1.1: Das Ziel ist es, folgendes zu beweisen: Sei $G = (V_1, V_2, E)$ ein bipartiter Graph mit $|V_1| = |V_2| = n$ ohne $a \times a$-Clique. Dann gilt $|E| \leq (a-1)^{\frac{1}{a}} n^{2-\frac{1}{a}} + (a-1)n$. Vergleicht man dies mit der zu Beginn gestellten Frage, so erkennt man:

$$\begin{array}{rcl} \text{bipartiter Graph} & \equiv & \{0,1\}^{n \times n}\text{-Matrix} \\ & \text{und} & \\ a \times a\text{-Clique} & \equiv & \{1\}^{a \times a}\text{-Teilmatrix.} \end{array}$$

Für den Beweis benötigen wir die Definition eines a-Sterns.

Definition 1.5 *Ein a-Stern in einem Graph $G = (V_1, V_2, E)$ ist eine Menge von a Kanten, die inzident zu einem Knoten $x \in V_1$ sind. Man bezeichnet einen a-Stern mit*

$$S(x, B) = \{(x, y) \in E : y \in B\},$$

wobei $B \subseteq V_2$, $|B| = a$.

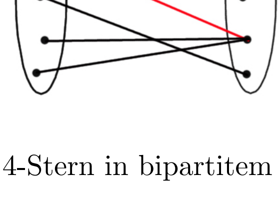

Abbildung 4: 4-Stern in bipartitem (5×5)-Graph.

Sei Δ die Gesamtanzahl solcher a-Sterne in G. Man kann die a-Sterne $S(x, B)$ auf zwei Arten abzählen, indem man entweder den Knoten x betrachtet oder die Teilmenge B.

Für eine feste Teilmenge $B \subseteq V_2$ mit $|B| = a$ können wir höchstens $a - 1$ a-Sterne der Form $S(x, B)$ haben, weil wir sonst eine $a \times a$-Clique in G hätten. Deshalb gilt, wenn man alle Teilmengen B mit a Elementen betrachtet

$$\Delta \leq (a-1) \cdot \binom{n}{a}. \tag{1}$$

Für einen festen Knoten $x \in V_1$ können wir $\binom{d(x)}{a}$ a-Sterne $S(x, B)$ formen, wobei $d(x)$ der Grad des Knoten x in G ist. Daher gilt, wenn man alle Knoten betrachtet,

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{x \in V_1} \binom{d(x)}{a} = n \cdot \sum_{x \in V_1} \frac{1}{n} \binom{d(x)}{a} = n \cdot \sum_{x \in V_1} \lambda_x f(d(x)) \\
&\geq n \cdot f\left(\sum_{x \in V_1} \lambda_x d(x) \right) = n \cdot \binom{(\sum d(x))/n}{a} = n \cdot \binom{|E|/n}{a}, \qquad (2)
\end{aligned}$$

wobei die Ungleichung aus Jensens Ungleichung folgt, indem man $f(d(x)) = \binom{d(x)}{a}$ und $\lambda_x = 1/n$ verwendet. Kombiniert man die Gleichungen (1) und (2), so erhält man

$$n \cdot \binom{|E|/n}{a} \leq (a-1) \cdot \binom{n}{a}.$$

Schreibt man die Binomialkoeffizienten als Quotienten von Fakultäten, so lautet diese Gleichung

$$n \cdot \frac{(|E|/n)!}{a!(|E|/n - a)!} \leq (a-1) \cdot \frac{n!}{a!(n-a)!}$$

In bipartiten Graphen $G = (V_1, V_2, E)$ mit $|V_1| = |V_2| = n$ gilt stets $|E| \leq n^2$. Somit gilt auch $m := |E|/n \leq n$. Wir wissen bereits, dass $n\binom{m}{a} \leq (a-1)\binom{n}{a}$ gilt, wollen die beiden Ausdrücke aber zunächst umschreiben:

$$\begin{aligned}
n\binom{m}{a} &= n\frac{m!}{a!(m-a)!} = \frac{n}{a!} \cdot m \cdot (m-1) \cdots (m-a+1) \\
&= \frac{n}{a!} \cdot \frac{m}{m-a+1} \cdots \frac{m-a+1}{m-a+1} \cdot (m-a+1)^a \\
&\underbrace{\leq}_{\clubsuit} \frac{a-1}{a!} \cdot \frac{n}{n-a+1} \cdots \frac{n-a+1}{n-a+1} \cdot (n-a+1)^a \\
&= \frac{a-1}{a!} \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-a+1) = (a-1)\frac{n!}{n!(n-a)!} \\
&= (a-1)\binom{n}{a}
\end{aligned}$$

Für $m \leq n$ und beliebige $b \in [0, m]$ gilt folgendes:

$$\begin{aligned} -m \geq -n \quad &\Rightarrow \quad -mb \geq -nb \quad \Rightarrow \quad mn - mb \geq mn - nb \\ &\Rightarrow \quad m(n-b) \geq n(m-b) \\ &\Rightarrow \quad \frac{m}{m-b} \geq \frac{n}{n-b} \end{aligned}$$

Es gelten also die Ungleichungen $\frac{m}{m-a+1} \geq \frac{n}{n-a+1}, \ldots, \frac{m-a+1}{m-a+1} \geq \frac{n-a+1}{n-a+1}$. Wenn wir die jeweiligen Faktoren paarweise aus beiden Seiten der Ungleichung ♣ entfernen, wird die linke Seite dabei also immer stärker verkleinert als die rechte. Somit folgt

$$\begin{aligned} \frac{n}{a!} \cdot (m-a+1)^a &\leq \frac{a-1}{a!} \cdot (n-a+1)^a. \\ \Leftrightarrow n(m-(a-1))^a &\leq (a-1)(n-(a-1))^a \\ \Leftrightarrow n(|E|/n-(a-1))^a &\leq (a-1)(n-(a-1))^a \\ \Leftrightarrow (|E|/n-(a-1))^a &\leq (a-1)n^{-1}(n-(a-1))^a \\ \Leftrightarrow |E|/n-(a-1) &\leq (a-1)^{\frac{1}{a}} n^{-\frac{1}{a}}(n-(a-1)) \\ \Leftrightarrow |E|/n &\leq (a-1)^{\frac{1}{a}} n^{-\frac{1}{a}}(n-(a-1)) + (a-1) \\ \Leftrightarrow |E|/n &\leq (a-1)^{\frac{1}{a}} n^{-\frac{1}{a}} n + (a-1), \end{aligned}$$

und deshalb gilt $|E|/n \leq (a-1)^{\frac{1}{a}} n^{1-\frac{1}{a}} + (a-1)$, woraus die gewünschte obere Grenze für $|E|$ abgeleitet werden kann. □

Die ursprüngliche Fragestellung war, wieviele Einsen eine Matrix $M \in \{0,1\}^{n \times n}$ höchstens enthalten kann, wenn sie keine Teilmatrix $\in \{1\}^{a \times b}$ enthält. Der Beweis, dass $|E| \leq (a-1)^{\frac{1}{a}} n^{2-\frac{1}{a}} + (a-1)n$ führt uns zur Lösung. Da die Matrix M symmetrisch ist, muss die Anzahl der Einsen also gleich $2|E| \leq 2(a-1)^{\frac{1}{a}} n^{2-\frac{1}{a}} + (a-1)n$ sein.