Entropie

Seminar Extremal Combinatorics

Michael Förster

23.07.2004

Entropie

- Entropie ist ein Grundkonzept der Informationstheorie
- Informationstheorie behandelt Konzept zur Übertragung von Information von einer Quelle zu einem Empfänger
- Entropie kann helfen obere Schranken von Mengen anzugeben

Definition 1

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten im Bereich B und sei $P(X = b) = p_b$ mit $b \in B$. Die binäre Entropie von X bezeichnen wir mit H[X] und ist definiert durch:

$$H[X] := -\sum_{b \in B} p_b \cdot \log_2(p_b)$$

mit der Konvention, dass $0 \cdot \log_2 0 := 0$ gelten soll.

Definition 2

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten im Bereich B und Y eine Zufallsvariable mit Werten im Bereich A

$$H[X, Y] := -\sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = b, Y = a) \cdot \log_2 P(X = b, Y = a)$$

Chung, Frankl, Graham und Shearer 1986

- Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eine Zufallsvariable die Werte aus $B = B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots \otimes B_n$ annimmt
- Jede ZV X_i nimmt Werte in $B_i = \{0, 1\}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$
- X_S bezeichne eine Zufallsvariable $(X_i)_{i \in S}$, z.B. (X_2, X_4, X_5) für $S = \{2, 4, 5\}$

Satz (Allgemeine Subadditivität)

Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ und $B = B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots \otimes B_n$ und seien $S_1, \ldots, S_m$ mit $m \leq n$ Teilmengen von $[n] = \{1, \ldots, n\}$ so dass jedes $i \in [n]$ mindestens zu $k \geq 1$ Mengen von $S_1, \ldots, S_m$ gehört. Dann

$$H[X] \leq \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{m} H[X_{S_i}]$$

Was heißt das?

Beispiel (mit n=5 und m=3):
$X = (X_1, \ldots, X_5)$ und $B = B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_4 \otimes B_5$.
S_1, S_2, S_3 sind Teilmengen von [5]={1,2,3,4,5} so dass $i \in [5]$ zu mindestens k Teilmengen von S_1, S_2, S_3 gehört.
Seien die Teilmengen: $S_1 = \{3, 4\}$, $S_2 = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{2, 3, 5\}$,

$$\left.\begin{array}{c} 1 \in S_2 \\ 2 \in S_2, S_3 \\ 3 \in S_1, S_2, S_3 \\ 4 \in S_1 \\ 5 \in S_3 \end{array}\right\} k = 1$$

Der Satz sagt nun, dass gilt:

$$
\begin{aligned}
H[X_1, \ldots, X_5] &\leq H[X_{S_1}] + H[X_{S_2}] + H[X_{S_3}] \\
&= H[X_3, X_4] + H[X_1, X_2, X_3] + H[X_2, X_3, X_5]
\end{aligned}
$$

Seien die Teilmengen: $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{2, 3, 4, 5\}$, $S_3 = \{1, 3, 4, 5\}$,

$$\left.\begin{array}{c} 1 \in S_1, S_3 \\ 2 \in S_1, S_2 \\ 3 \in S_1, S_2, S_3 \\ 4 \in S_2, S_3 \\ 5 \in S_2, S_3 \end{array}\right\} k = 2$$

Sonderfall

Wählen wir m=n und sei $S_i = \{i\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, dann ist k=1 und

$$H[X] \leq \sum_{i=1}^{n} H[X_i]$$

Kombinatorische Anwendungen

- Wir betrachten Familien von Teilmengen von $[n] = \{1, \ldots, n\}$
- "Codieren" der Teilmengen mit n-dimensionaler Zufallsvariable
- Beispiel:
  $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, S_3\}$ Familie von Teilmengen von $\{1, \ldots, 5\}$
  $S_1 = \{1\} \Rightarrow \upsilon_{S_1} = (1, 0, 0, 0, 0)$
  $S_2 = \{4, 5\} \Rightarrow \upsilon_{S_2} = (0, 0, 0, 1, 1)$
  $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow \upsilon_{S_3} = (1, 1, 1, 1, 1)$

Projektionen

- Projektion: $\mathcal{F}_i : \mathcal{F} \to S_i$ mit $\mathcal{F}_i := \{E \cap S_i | E \in \mathcal{F}\}$

Projektionen

- Projektion: $\mathcal{F}_i : \mathcal{F} \to S_i$ mit $\mathcal{F}_i := \{E \cap S_i | E \in \mathcal{F}\}$
- Schnitt von Teilmengen von $\{1,2,3\}$ mit $S_1 = \{1,2\}$:

$$\left.\begin{array}{c} \emptyset \cap S_1 = \emptyset \\ \{1\} \cap S_1 = \{1\} \\ \{2\} \cap S_1 = \{2\} \\ \{1,2\} \cap S_1 = S_1 \\ \{1,3\} \cap S_1 = \{1\} \\ \{1,2,3\} \cap S_1 = S_1 \end{array}\right\} \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

Satz

Sei Ω endliche Menge und $S = \{S_1, \dots, S_m\}$ Teilmengen von Ω, so dass jedes Element von Ω in mindestens $k \geq 1$ Mitgliedern von S enthalten ist.
Sei weiter $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von Ω. Für jedes $1 \leq i \leq m$ definieren Projektion $\mathcal{F}_i := \{E \cap S_i | E \in \mathcal{F}\}$. Dann

$$|\mathcal{F}| \leq (\prod_{i=1}^{m} |\mathcal{F}_i|)^{\frac{1}{k}} \quad (1)$$

Beweis

- Sei $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ und $B_i := \{0, 1\}$ für $1 \leq i \leq n$

Beweis

- Sei $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ und $B_i := \{0, 1\}$ für $1 \leq i \leq n$
- Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ Zufallsvariable, die Werte in $B = B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n$ annimmt

Beweis

- Sei $\Omega = \{1, \dots, n\}$ und $B_i := \{0, 1\}$ für $1 \leq i \leq n$
- Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ Zufallsvariable, die Werte in $B = B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n$ annimmt
- Für jedes $E \in \mathcal{F}$ sei $P(X = \upsilon_E) = \frac{1}{|\mathcal{F}|}$

$$
\begin{aligned}
H[(X_1, X_2, \ldots, X_n)] &= -\sum_{F \in \mathcal{F}} P[(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \upsilon_F] \\
&\quad \cdot \log_2 P[(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \upsilon_F] \\
&= |\mathcal{F}| \cdot (-\frac{1}{|\mathcal{F}|} \cdot \log_2 \frac{1}{|\mathcal{F}|}) \\
&= |\mathcal{F}| \cdot (\frac{1}{|\mathcal{F}|} \cdot \log_2 |\mathcal{F}|) \\
&= \log_2 |\mathcal{F}|
\end{aligned}
$$

$$H[X_{S_i}] \leq \log_2 |\mathcal{F}_i| \text{ für } i \in 1, \ldots, n$$

Sei zum Beispiel n=5 und $S_1 = \{2, 3, 5\}$

$$\begin{aligned}
H[X_{S_1}] &= H[X_2, X_3, X_5] \\
&= -P[X_{S_1} = (0,0,0)] \cdot \log_2 P[X_{S_1} = (0,0,0)] - \cdots \\
&\quad -P[X_{S_1} = (1,1,1)] \cdot \log_2 P[X_{S_1} = (1,1,1)] \\
&= -\frac{1}{|\mathcal{F}_i|} \cdot \log_2 \frac{1}{|\mathcal{F}_i|} - \cdots - \frac{1}{|\mathcal{F}_i|} \cdot \log_2 \frac{1}{|\mathcal{F}_i|} \\
&= -\log_2 \frac{1}{|\mathcal{F}_i|} \cdot \frac{1 + \cdots + 1}{|\mathcal{F}_i|} \\
&\leq -\log_2 \frac{1}{|\mathcal{F}_i|} = \log_2 |\mathcal{F}_i|
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H[X] &= \log_2 |\mathcal{F}| \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m} H[X_{S_i}] \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m} \log_2 |\mathcal{F}_i| \\ &= \frac{1}{k}\log_2\Big(\prod_{i=1}^{m} |\mathcal{F}_i|\Big) = \log_2 \Big(\prod_{i=1}^{m} |\mathcal{F}_i|\Big)^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H[X] &= \log_2 |\mathcal{F}| \le \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m} H[X_{S_i}] \le \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m} \log_2 |\mathcal{F}_i| \\ &= \frac{1}{k}\log_2(\prod_{i=1}^{m} |\mathcal{F}_i|) = \log_2\left(\prod_{i=1}^{m} |\mathcal{F}_i|\right)^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

- $$|\mathcal{F}| \le \left(\prod_{i=1}^{m} |\mathcal{F}_i| \right)^{\frac{1}{k}} \qquad \blacksquare$$

Bemerkung: Familie kann nicht viele Mitglieder haben, wenn ihre "Projektionen" klein sind

Definition

Eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von irgendeiner Menge Ω heißt intersecting, wenn folgendes gilt:

$$F \cap F' \neq \emptyset \text{ für alle } F, F' \in \mathcal{F}$$

Definition

Eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von irgendeiner Menge Ω heißt intersecting, wenn folgendes gilt:

$$F \cap F' \neq \emptyset \text{ für alle } F, F' \in \mathcal{F}$$

- Wenn $\mathcal{F}$ intersecting ist, dann $|\mathcal{F}| \leq 2^{|\Omega|-1}$

Satz

Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von $[n]$, so dass für alle $F, F' \in \mathcal{F}$ einige $1 \leq i < n$ existieren, so dass $F \cap F' \supseteq \{i, i+1\}$. Dann

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{n-2}$$

Beweis

- Sei S_0 Menge aller geraden und
  S_1 Menge aller ungeraden Zahlen in $[n]$

Beweis

- Sei S_0 Menge aller geraden und
  S_1 Menge aller ungeraden Zahlen in $[n]$
- Betrachte die Projektionen
  $\mathcal{F}_\epsilon := \{F \cap S_\epsilon | F \in \mathcal{F}\}$ mit $\epsilon \in \{0, 1\}$

Beweis

- Sei S_0 Menge aller geraden und S_1 Menge aller ungeraden Zahlen in $[n]$
- Betrachte die Projektionen $\mathcal{F}_\epsilon := \{F \cap S_\epsilon | F \in \mathcal{F}\}$ mit $\epsilon \in \{0, 1\}$
- Seien $G, G' \in \mathcal{F}_\epsilon$, dann $G \cap G' = (F \cap S_\epsilon) \cap (F' \cap S_\epsilon) = (F \cap F') \cap S_\epsilon$

- Nach Voraussetzung enthält $(F \cap F')$ ein Paar aufeinanderfolgender Zahlen und ist daher nicht leer.

- Nach Voraussetzung enthält $(F \cap F')$ ein Paar aufeinanderfolgender Zahlen und ist daher nicht leer.
- Mengen $\mathcal{F}_\epsilon$ intersecting und so gilt:

$$|\mathcal{F}_\epsilon| \leq 2^{|S_\epsilon|-1} \text{ für beide } \epsilon \in \{0, 1\}$$

- Nach Voraussetzung enthält $(F \cap F')$ ein Paar aufeinanderfolgender Zahlen und ist daher nicht leer.
- Mengen $\mathcal{F}_\epsilon$ intersecting und so gilt:

$$|\mathcal{F}_\epsilon| \leq 2^{|S_\epsilon|-1} \text{ für beide } \epsilon \in \{0,1\}$$

- Mit Gleichung 1 erhalten wir mit k=1

$$|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_0| \cdot |\mathcal{F}_1| \leq 2^{|S_0|-1} \cdot 2^{|S_1|-1} = 2^{|S_0|+|S_1|-2} = 2^{n-2}$$

$\blacksquare$

Satz

Nehmen wir an, dass $\mathcal{F}$ eine Familie von markierten Teilgraphen von K_n ist, so dass für alle $F, F' \in \mathcal{F}$ der Graph $F \cap F'$ keine isolierten Knoten besitzt. Dann

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{\binom{n}{2} - \frac{n}{2}}$$

Beweis

- Wähle S_i als einen Sterngraph am i-ten Knoten

Beweis

- Wähle S_i als einen Sterngraph am i-ten Knoten
- Jede Kante von K_n ist in genau 2 Mengen von $S_1, \ldots, S_n$

Beweis

- Wähle S_i als einen Sterngraph am i-ten Knoten
- Jede Kante von K_n ist in genau 2 Mengen von $S_1, \dots, S_n$
- Projektion $\mathcal{F}_i := \{F \cap S_i | F \in \mathcal{F}\}$ von $\mathcal{F}$ auf Sterngraphen $i = 1, \dots, n$

Beweis

- Wähle S_i als einen Sterngraph am i-ten Knoten
- Jede Kante von K_n ist in genau 2 Mengen von $S_1, \ldots, S_n$
- Projektion $\mathcal{F}_i := \{F \cap S_i | F \in \mathcal{F}\}$ von $\mathcal{F}$ auf Sterngraphen $i = 1, \ldots, n$
- $G, G' \in \mathcal{F}_i$, dann hat ihre Schnittmenge die Form:

$$\begin{aligned} G \cap G' &= (F \cap S_i) \cap (F' \cap S_i) \\ &= (F \cap F') \cap S_i \end{aligned}$$

für irgendwelche $F, F' \in \mathcal{F}$

Es gilt also:

- Schnittmenge nicht leer, weil der Knoten i, nach Voraussetzung nicht isoliert im Teilgraph $F \cap F'$
  $\Rightarrow \mathcal{F}_i$ ist intersecting

Es gilt also:

- Schnittmenge nicht leer, weil der Knoten i, nach Voraussetzung nicht isoliert im Teilgraph $F \cap F'$
  $\Rightarrow \mathcal{F}_i$ ist intersecting
- $$|\mathcal{F}_i| \leq 2^{|S_i|-1} = 2^{n-1-1} = 2^{n-2} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

Es gilt also:

- Schnittmenge nicht leer, weil der Knoten i, nach Voraussetzung nicht isoliert im Teilgraph $F \cap F'$
  $\Rightarrow \mathcal{F}_i$ ist intersecting
- $$|\mathcal{F}_i| \leq 2^{|S_i|-1} = 2^{n-1-1} = 2^{n-2} \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$
- Wir wenden Gleichung 1 mit k=2 und $\binom{n}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n \cdot (n-2)}{2}$ an:

$$|\mathcal{F}| \leq (\prod_{i=1}^{n} |\mathcal{F}_i|)^{\frac{1}{2}} \leq (\prod_{i=1}^{n} 2^{n-2})^{\frac{1}{2}} = 2^{n \cdot (n-2)/2} = 2^{\binom{n}{2} - \frac{n}{2}} \qquad \blacksquare$$

Triangle-Intersecting

Definition

Eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilgraphen des vollständigen Graph K_n heißt triangle-intersecting, wenn die Schnittmenge $F \cap F'$ ein Dreieck enthält für alle $F, F' \in \mathcal{F}$.

Triangle-Intersecting

Satz

Sei $n \geq 4$ gerade und sei $\mathcal{F}$ eine Familie von (markierten) Teilgraphen von K_n. Wenn $\mathcal{F}$ triangle-intersecting ist, dann gilt:

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{\binom{n}{2}-2}$$

Beweis:

- Definition von S_i:
  Wir fassen von den n Knoten $\frac{n}{2}$ in der Menge U zusammenfassen

Beweis:

- Definition von S_i:
  Wir fassen von den n Knoten $\frac{n}{2}$ in der Menge U zusammenfassen
- $S_i := K_U \cup K_{\bar{U}}$
  Beispiel für n=4: $S_1 = \{1,3\} \cup \{2,4\}$
  Beispiel für n=6: $S_1 = \{1,3,4\} \cup \{2,5,6\}$
  Die Knoten der beiden disjunkten Mengen bilden einen vollständigen Teilgraphen

Eigenschaften:

- Es gibt $m := \frac{1}{2}\binom{n}{n/2}$ verschiedene S_i

Eigenschaften:

- Es gibt $m := \frac{1}{2}\binom{n}{n/2}$ verschiedene S_i
- Jede Kante des vollständigen Graphen auf n Knoten K_n ist in $k := \binom{n-2}{n/2} S_i$ enthalten.
  Wählen wir Knoten i und j aus einer der Teilmengen:

$$\{i, j, \_, \ldots, \_\} \cup \{\underbrace{\_, \ldots, \_}_{\frac{n}{2}}\}$$

Eigenschaften:

- Es gibt $m := \frac{1}{2}\binom{n}{n/2}$ verschiedene S_i
- Jede Kante des vollständigen Graphen auf n Knoten K_n ist in $k := \binom{n-2}{n/2} S_i$ enthalten.
  Wählen wir Knoten i und j aus einer der Teilmengen:

$$\{i, j, \_, \ldots, \_\} \cup \{\underbrace{\_, \ldots, \_}_{\frac{n}{2}}\}$$

- Jeder Graph S_i hat $s := 2 \cdot \binom{n/2}{2}$ Kanten

- Projektion der Teilgraphen $F \in \mathcal{F}$ auf S_i mit
  $\mathcal{F}_i := \{F \cap S_i | F \in \mathcal{F}\}$
  Wählen wir $G, G' \in \mathcal{F}_i$ dann gilt:

$$\begin{aligned} G \cap G' &= (F \cap S_i) \cap (F' \cap S_i) \\ &= (F \cap F') \cap S_i \neq \emptyset \text{ für } F, F' \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

- Projektion der Teilgraphen $F \in \mathcal{F}$ auf S_i mit
  $\mathcal{F}_i := \{F \cap S_i | F \in \mathcal{F}\}$
  Wählen wir $G, G' \in \mathcal{F}_i$ dann gilt:

$$\begin{aligned} G \cap G' &= (F \cap S_i) \cap (F' \cap S_i) \\ &= (F \cap F') \cap S_i \neq \emptyset \text{ für } F, F' \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

- Nach Satz von König ist Graph bipartit genau dann, wenn keine Kreise ungerader Länge in G existieren

- Projektion der Teilgraphen $F \in \mathcal{F}$ auf S_i mit $\mathcal{F}_i := \{F \cap S_i | F \in \mathcal{F}\}$
  Wählen wir $G, G' \in \mathcal{F}_i$ dann gilt:

$$\begin{aligned} G \cap G' &= (F \cap S_i) \cap (F' \cap S_i) \\ &= (F \cap F') \cap S_i \neq \emptyset \text{ für } F, F' \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

- Nach Satz von König ist Graph bipartit genau dann, wenn keine Kreise ungerader Länge in G existieren
- Komplementärgraph von S_i bipartit $\Rightarrow$ Projektion der Dreiecke auf S_i enthält mindestens eine Kante

- Projektion der Teilgraphen $F \in \mathcal{F}$ auf S_i mit
  $\mathcal{F}_i := \{F \cap S_i | F \in \mathcal{F}\}$
  Wählen wir $G, G' \in \mathcal{F}_i$ dann gilt:

$$\begin{aligned} G \cap G' &= (F \cap S_i) \cap (F' \cap S_i) \\ &= (F \cap F') \cap S_i \neq \emptyset \text{ für } F, F' \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

- Nach Satz von König ist Graph bipartit genau dann, wenn keine Kreise ungerader Länge in G existieren
- Komplementärgraph von S_i bipartit $\Rightarrow$ Projektion der Dreiecke auf S_i enthält mindestens eine Kante
- $\Rightarrow \mathcal{F}_i$ intersecting

- $|\mathcal{F}_i| \leq 2^{|S_i|-1}$
- Mit Satz folgt $|\mathcal{F}| \leq (\prod_{i=1}^{m} 2^{|S_i|-1})^{1/k} = 2^{(s-1)m/k}$

- $|\mathcal{F}_i| \leq 2^{|S_i|-1}$
- Mit Satz folgt $|\mathcal{F}| \leq (\prod_{i=1}^{m} 2^{|S_i|-1})^{1/k} = 2^{(s-1)m/k}$
- Nach einsetzen der Werte für s, m und k erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{(s-1)m}{k} &= \frac{(2\binom{n/2}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}\binom{n}{n/2})}{\binom{n-2}{n/2}} \\ &\leq \binom{n}{2}-2 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Zusammenfassung

- Entropie aus der Informationstheorie hat sinnvollen Nutzen in Kombinatorik
- Sätze abgeleitet aus der Allgemeinen Subadditivität
- Erweiterung in der Graphentheorie