"Algorithms Based on the Treewidth of Sparse Graphs" – Teil 1
Handout vom 28.11.2005

David Boymanns*

30.11.2005

1 Kontext

Nachdem wir einführend die Begriffe Baum- und Pfadweite geklärt hatten, beschäftigten wir uns in dieser Sitzung mit den ersten Definitionen und Lemmas.

2 Ein Algorithmus mit nur einer Verkürzungs-Regel

Erklärung der Begriffe $R(G)$, legs, *Hot Dog* Graphen, *3-* und *4-spiders* und Potenzialfunktionen

2.1 Definition 1 – $R(G)$

$R(G)$ ist der Graph, bei dem wiederholend immer alle Knoten mit Grad eins gelöscht werden. Es werden also alle "Äste" eines Kreises gelöscht.
Bäume werden dadurch vollständig gelöscht (Unter der Annahme, dass einzelne Knoten mit Grad null nicht beachtet werden).

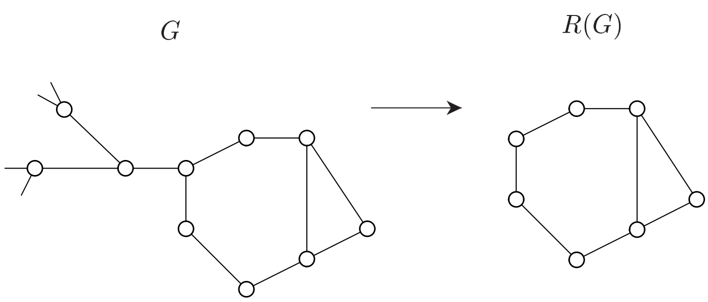

Abbildung 1: Reduzierung durch $R(G)$

*david@rockt-aachen.de

2.2 Lemma 1

Wenn man eine beliebige Menge D von Knoten aus G löscht und diesen danach reduziert, ist es dasselbe, als wenn man immer einen Knoten in beliebiger Reihenfolge aus D löscht und direkt danach reduziert.

2.3 Lemma 2

Bei jedem Graph G, der einen Kreis enthält, ist die Baumweite von G gleich der Baumweite des reduzierten Graphen $R(G)$.
Das kann man sich leicht erklären: Wenn der Graph einen Kreis enthält, braucht man mehr als zwei Polizisten. Bei der Reduzierung des Graphen können allerdings auch nur Teilbäume wegfallen, die eh nie mehr als zwei Polizisten benötigen. Da ein Kreis aber schon drei Polizisten braucht, kann man die Äste, die bei der Reduzierung wegfallen würden, ohne zusätzliche Polizisten kontrollieren.

2.4 Definition 2

2.4.1 legs

Legs (Beine) sind zwei nicht unbedingt verschiedene Knoten s und t, die durch einen Pfad der Länge mindestens eins verbunden sind, in welchem jeder Knoten den Grad zwei hat. Der Pfad zwischen s und t enthält also keine weiteren Abzweigungen.

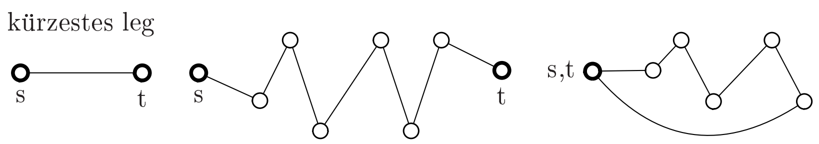

Abbildung 2: Beispiele für legs

2.4.2 *Hot Dog* Graphen

Die sogenannten *Hot Dog* Graphen bestehen aus Knoten $v_1, ..., v_k$, wobei Knoten v_i und v_{i+1} durch beliebig viele legs verbunden sind. Die Knoten, die in den legs enthalten sind, zählen natürlich auch zu dem Graphen. Der erste und letzte Knoten können außerdem verbunden sein.

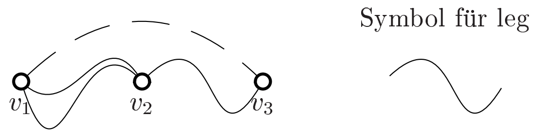

Abbildung 3: Beispiel für einen *Hot Dog* Graphen

2.5 Definition 3 – Spider

Im *spider*-Graph haben alle Knoten mindestens Grad zwei. Er besteht aus einem Kopf h und Füßen $u_1, ..., u_l$. Der *body* eines Spiders besteht immer aus allen Knoten außer den Füßen.

2.5.1 4-spider

Beim *4-spider* muss h vom Grad vier sein. Außerdem hat er drei oder vier verschiedene Füße u vom Grad mindestens drei, die durch vier verschiedene legs mit dem Kopf h verbunden sind.

2.5.2 3-spider

Der *3-spider* ist wie der *4-spider*, außer dass der Kopf h Grad drei hat und es nur drei Füße gibt, die durch drei verschiedene legs mit dem Kopf h verbunden sind.

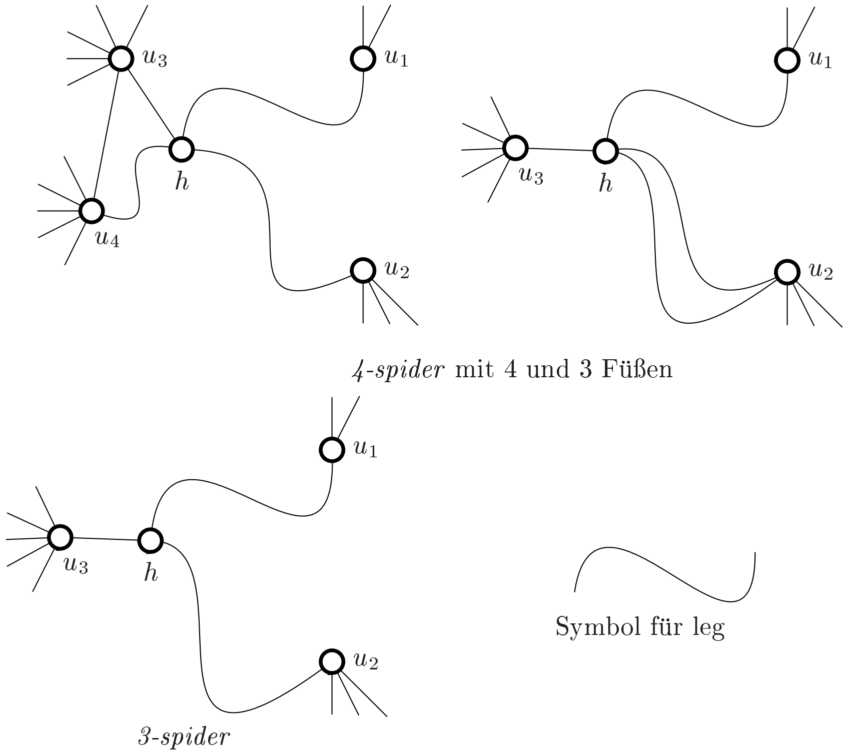

Abbildung 4: Beispiele für Spider-Graphen

2.6 Lemma 3

Wenn G ein Graph ist, dessen Knoten nur Grade zwischen zwei und vier haben, dann ist G ein *Hot Dog* Graph genau dann, wenn G keine *3-* oder *4-spider* enthält.

$\Rightarrow$: In einem *Hot Dog* Graphen kann man keinen Knoten als Kopf eines Spiders auswählen, da die Knoten v_i eines *Hot Dog* Graphen immer nur zwei verschiedene Füße haben.

$\Leftarrow$: Nehmen wir die Menge H, die nur Knoten enthält, die nicht den Grad zwei haben, also nicht Bestandteil von legs sind. Jeder Knoten aus H kann also mit höchstens zwei legs mit anderen Knoten aus H verbunden sein. Wäre er mit drei legs verbunden, wäre dieser Knoten schon der Kopf eines Spiders. Deswegen kann man die Knoten aus H als Pfad oder Kreis anordnen, was genau einem *Hot Dog* Graphen entspricht.

2.7 Definition 4

Die Potenzialfunktion gibt die "Aufwändigkeit" eines Knoten an, ihn aus dem Graphen zu entfernen, bzw. einen Graph zu einem Leichteren zu reduzieren.

2.7.1 $deg_3(v)$

$deg_3(v)$ ist die Anzahl der Knoten, deren Grad mindestens drei ist und die durch ein leg mit v verbunden sind.

2.7.2 ψ und Ψ

Es gibt zwei Potenzialfunktionen: $\psi : V \to N$ und $\Psi : G \to N$

$\psi(v)$ ist 5/4 wenn $deg(v) = 3$ und $deg_3(v) > 3$
$\psi(v)$ ist 2 wenn $deg(v) \geq 4$
In allen anderen Fällen ist $\psi(v)$ 0

$\Psi(G)$ ist die Summe aller $\psi(v)$ mit $v \in V$.

2.8 Lemma 4 – $\Psi(G) \leq |E|$

Die Anzahl der Kanten eines Graphen ist folgendermaßen definiert: $\frac{1}{2}\sum_{v\in V} deg(v)$
Das kann man natürlich auch so umschreiben, dass man zuerst die Knoten mit Grad eins zählt, dann die mit Grad zwei usw. :

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{|V|-1} \sum_{\substack{v\in V \\ deg(v)=i}} i$$

Um die Ungleichung etwas deutlicher zu machen, nehmen wir an, dass $|V| > 4$ ist und ziehen die Summe etwas auseinander:

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \sum_{\substack{v\in V \\ deg(v)=i}} i + \sum_{\substack{v\in V \\ deg(v)=3}} \frac{6}{4} + \sum_{i=4}^{|V|-1} \sum_{\substack{v\in V \\ deg(v)=i}} \frac{i}{2}$$

Jetzt sieht man, dass $|E| \geq \Psi(G)$

$$|E| \geq \sum_{\substack{v\in V \\ deg(v)=3}} \frac{5}{4} + \sum_{\substack{v\in V \\ deg(v)\geq 4}} 2 \geq \Psi(G)$$