# Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

## Tutoraufgabe 16

Ein Student möchte für eine Prüfung lernen und daher seinen Blutzuckerspiegel anheben. Er beschließt, in eine Bäckerei zu gehen und Kuchen zu kaufen. Zur Auswahl stehen Käse- und Schokokuchen, wobei jeder Käsekuchen drei Einheiten Zucker und acht Einheiten Sahne und jeder Schokokuchen vier Einheiten Zucker, zwei Einheiten Sahne und vier Einheiten Schokolade enthält. Der Student ist der Ansicht, daß er wenigstens 20 Einheiten Zucker, 10 Einheiten Sahne und 15 Einheiten Schokolade zu sich nehmen sollte.

In der Bäckerei kostet ein solcher Käsekuchen 1,20 EUR, ein Schokokuchen 2,50 EUR (dafür schmeckt dieser aber auch besser). Der Bäcker hat Verständnis für die notorische Geldnot des Studenten und bietet ihm an, Kuchen in beliebigen Teilmengen abzunehmen, damit der Student möglichst günstig einkaufen kann.

Zusammengefasst ergibt sich folgende Tabelle:

| | Zucker | Sahne | Schokolade | Kosten |
|---|---|---|---|---|
| Käsekuchen | 3 | 8 | 0 | 1,20 |
| Schokoladenkuchen | 4 | 2 | 4 | 2,50 |
| Mindestmenge | 20 | 10 | 15 | |

Modellieren Sie dieses Problem aus Sicht des Studenten als ein LP.

Berechnen Sie danach das duale Problem und versuchen Sie ein Modell aus der realen Welt zu finden, das diesem dualen Problem entspricht.

## Tutoraufgabe 17

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Betrachten Sie das folgende zugehörige LP:

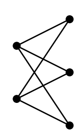
Minimiere $\sum_{v \in V} x_v$ unter

$$\begin{aligned} x_u + x_v &\geq 1 && \text{for all } \{u, v\} \in E \\ x_v &\geq 0 && \text{for all } v \in V \end{aligned}$$

Ist dieses eine zulässige Formulierung für das bekannte Vertex Cover-Problem?

Bilden Sie das duale Problem zu obigem LP und interpretieren Sie es.

Lösen Sie dann obiges LP für folgenden bipartiten Graphen:



**Hausaufgabe 10 (10 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende LP: Maximiere $x + y$ unter $y \leq 2$, $x \leq 3$ und $y - x \geq -2$.

Lösen Sie es mit geeigneten Mitteln und geben Sie einen einfachen Beweis an, daß Ihre Lösung korrekt ist.

Beachten Sie, daß etwa eine Anwendung des Simplex-Algorithmus oder eine graphische Lösung allein kein Beweis für die Korrektheit sind, da Sie sich verrechnet haben könnten.

**Hausaufgabe 11 (10 Punkte)**

Beweisen Sie Farkas Lemma B:

Sei $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$. Dann ist genau eine dieser Aussagen wahr:

1. Es gibt ein $x \in \mathbf{R}^n$ mit $Ax \leq b$.
2. Es gibt ein $y \geq 0$ mit $A^T y = 0$, $b^T y < 0$.