RWTH Aachen
Lehrgebiet Theoretische Informatik
Kuinke–Rossmanith–Sanchez

WS 2016
Übungsblatt 2
2.11.2016

Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

Tutoraufgabe 4

Im einfachsten Fall werden erst die oberen Knoten *gelifted* und dann ihr Überfluß auf die unteren drei Knoten weitergeleitet. Dann werden diese *gelifted* und ihr Überfluß nach t *gepushed*.

Tutoraufgabe 5

Wir können davon ausgehen, daß die Nachbarn eines Knotens als Adjazensliste gespeichert sind. Diese Listen wiederum sind in einem Array gespeichert.
Desweiteren nutzen wir eine

- Liste aller überfließender Knoten
- zu jedem Knoten v eine Liste $L(v)$ aller Nachbarn u von v mit $h(v) = h(u) + 1$
- Liste mit überfließenenden Knoten, mit $L(v) > 0$
- Liste mit Knoten die liftbar sind
- Liste mit Knoten die liftbar wären, wenn sie nicht überfließend
- zu jedem Knoten Anzahl der Kanten nach unten

Tutoraufgabe 6

Wenn es ein $S \subseteq A$ mit $|N(S)| < |S|$ gibt, dann kann offenkundig kein Matching alle Knoten aus S überdecken.
Es gelte nun $\forall S \subseteq A.\ |N(S)| \geq |S|$, und M sei ein Matching maximaler Kardinalität in G. Setze

- $X_0 = \{u \in A \mid u \text{ nicht überdeckt}\}$,
- $X = \{u \in A \mid \exists s \in X_0 \exists M\text{-alternierender Pfad von } s \text{ nach } u\}$ und
- $Y = \{u \in B \mid \exists s \in X_0 \exists M\text{-alternierender Pfad von } s \text{ nach } u\}$.

Dann gilt $N(X) \subseteq Y$. Außerdem wird jeder Knoten in Y von M überdeckt (sonst gäbe es einen augmentierenden Pfad, im Widerspruch zur Maximalität von M), daher gilt auch $|X \setminus X_0| = |Y|$. Also $|X_0| + |Y| = |X_0| + |X \setminus X_0| = |X| \leq |N(X)| \leq |Y|$ und damit $X_0 = \emptyset$.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Dies geht mit einer Augmentierung, da die optimale Lösung durch die Änderung höchstens um den Wert eins erhöht wurde und der Ford–Fulkerson-Algorithmus den alten Fluß in jedem Schritt um einen ganzzahligen Wert verbessert. Die Laufzeit ist also linear.

Hausaufgabe 3 (10 Punkte)

Seien $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ die Preise der Gegenstände. Das Problem läßt sich leicht als Matchingproblem darstellen. Wir konstruieren einen bipartiten Graphen G mit den folgenden Knoten $U = \{x_i \in X \mid x_i \text{ ist ungerade}\}$ und $G = \{x_i \in X \mid x_i \text{ ist gerade}\}$. Wir verbinden $x_i \in U$ mit $x_j \in G$, falls der Centbetrag c von $x_i + x_j$ entweder 11, 33, 55, 77 oder 99 ist. Das Gewicht der entsprechende Kante setzen wir auf c.

Es ist leicht einzusehen, daß ein maximales gewichtetes Matching in G genau eine Lösung unseres Problems darstellt. Formal wäre zu zeigen, daß jedes Matching eine Lösung unseres Problems darstellt und umgekehrt. Auf Grund der Konstruktion ist dies jedoch offensichtlich.