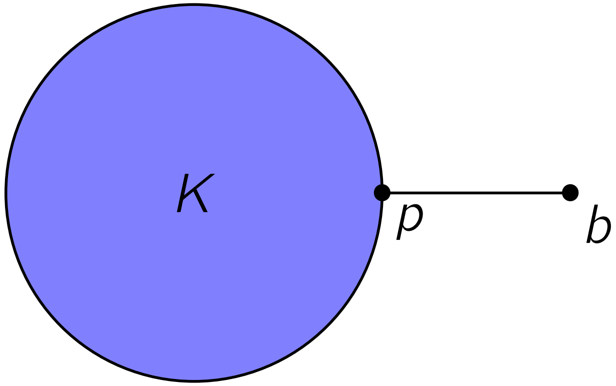
Lemma (Das Projektionstheorem)

Sei K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ und $b \in \mathbf{R}^n$.

Sei p die *Projektion* von b auf K (d.h. der Punkt in K mit minimalem Euklidischen Abstand $|p - b|$ von b).

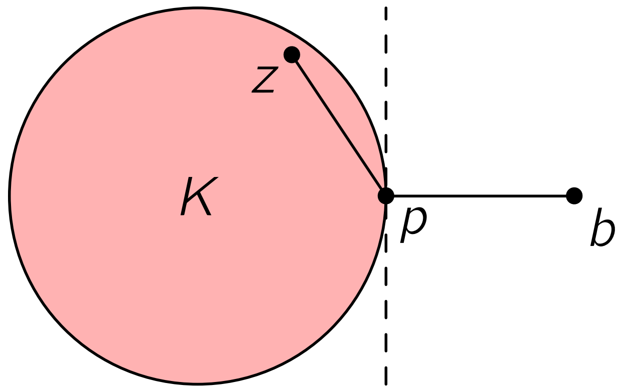


Dann gilt

$$(z - p)^T (b - p) \leq 0$$

für alle $z \in K$.

Beweis



Da K konvex ist, liegen z und b auf verschiedenen Seiten der Hyperebene, die normal zu $b - p$ durch p geht (wobei z auch auf dieser Hyperebene liegen kann).

Sei α der Winkel zwischen $z - p$ und $b - p$. Dann ist $\alpha \geq \pi/2$.

$\Rightarrow (z - p)^T(b - p) = |z - p| \cdot |b - p| \cos\alpha \leq 0.$

(Falls $b \in K$, dann gilt die Aussage trivialerweise.)

Dualität

Theorem (Farkas Lemma A)

Sei $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$. Dann ist genau eine dieser Aussagen wahr:

1. Es gibt ein $x \in \mathbf{R}^n$ mit $Ax = b$, $x \geq 0$.
2. Es gibt ein $y \in \mathbf{R}^m$ mit $A^T y \geq 0$, $b^T y < 0$.

Beweis

Angenommen beide Aussagen gälten.

$$Ax = b \Rightarrow y^T Ax = y^T b \Rightarrow x^T A^T y = y^T b < 0 \tag{1}$$

$$x \geq 0,\ A^T y \geq 0 \Rightarrow x^T A^T y \geq 0 \tag{2}$$

Offensichtlich widersprechen sich (1) und (2). Also kann höchstens eine der Aussagen wahr sein.

Nehmen wir jetzt an, die erste Aussage gilt nicht.

Sei $K = \{ Ax \mid x \geq 0 \}$. K ist abgeschlossen und konvex und $b \notin K$.

Sei p die Projektion von b auf K.

Es gibt ein w mit $Aw = p$.

Gemäß Projektionstheorem gilt dann

$$(z-p)^T(b-p) \leq 0 \text{ für alle } z \in K.$$

Insbesondere gilt

$$(Ax-p)^T(b-p) \leq 0 \text{ für alle } x \geq 0.$$

Wir wählen $y = p - b$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(Ax - p)^T(b - p) &\leq 0 \text{ für alle } x \geq 0 \\
\Rightarrow (Ax - p)^T y &\geq 0 \text{ für alle } x \geq 0 \\
\Rightarrow (Ax - Aw)^T y &\geq 0 \text{ für alle } x \geq 0 \\
\Rightarrow (x - w)^T A^T y &\geq 0 \text{ für alle } x \geq 0 \\
\Rightarrow x^T A^T y &\geq 0 \text{ für alle } x \geq 0 \text{ (denn } w \geq 0) \\
\Rightarrow A^T y &\geq 0
\end{aligned}
$$

Damit haben wir $A^T y \geq 0$ bewiesen.

Wir haben $A^T y \geq 0$ und brauchen noch $b^T y < 0$.

$$y^T b = (p - y)^T y = p^T y - y^T y$$

Es gilt aber

$$(Ax - p)^T y \geq 0$$

für alle $x \geq 0$ (vorige Folie).

Insbesondere ist $p^T y \leq 0$ (aus $x = 0$).

Es ist $y^T y > 0$, denn $y = p - b \neq 0$.

$$\Rightarrow y^T b = p^T y - y^T y < 0$$

$\square$

Dualität

Theorem (Farkas Lemma B)

Sei $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$. Dann ist genau eine dieser Aussagen wahr:

1. Es gibt ein $x \in \mathbf{R}^n$ mit $Ax \leq b$.
2. Es gibt ein $y \geq 0$ mit $A^T y = 0$, $b^T y < 0$.

Beweis

Übungsaufgabe!

Starke Dualität

$$z = \min\{\, c^T x \mid Ax = b,\, x \geq 0 \,\} \qquad (P)$$

$$w = \max\{\, b^T y \mid A^T y \leq c \,\} \qquad (D)$$

Theorem (Starke Dualität)

Falls das primale oder duale Problem zulässige Lösungen besitzt, dann gilt $z = w$.

Beweis

Wir müssen lediglich $z \leq w$ zeigen.

O.B.d.A. habe P eine zulässige Lösung (Dualität!).

Falls P unbeschränkt ist, dann $z = w = -\infty$ wegen schwacher Dualität.

Beweis (Fortsetzung)

Sei nun P beschränkt und x^* eine optimale primale Lösung. Es gilt daher $Ax^* = b$ und $c^T x^* = z$.

Wenn wir zeigen können, daß es ein y gibt, mit

$$A^T y \leq c \text{ und } b^T y \geq z,$$

dann sind wir fertig, denn y ist eine zulässige duale Lösung. Der Wert der Zielfunktion ist mindestens z. Also ist $w \geq z$.

Nehmen wir also an, so ein y existiere nicht.

Wir verwenden jetzt diese Form von Farkas Lemma:

1. Entweder $\exists \hat{x}$ mit $\hat{A}\hat{x} \le \hat{b}$,
2. oder $\exists \hat{y} \ge 0$ mit $\hat{A}^T \hat{y} = 0$ und $\hat{b}^T \hat{y} < 0$.

Wir definieren:

$$\hat{A} := \begin{pmatrix} A^T \\ -b^T \end{pmatrix}, \quad \hat{b} := \begin{pmatrix} c \\ -z \end{pmatrix}, \quad \hat{x} := y, \quad \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} := \hat{y}$$

Nach unserer Annahme ist dann 1. im Lemma falsch und 2. muß wahr sein.

Die Annahme war: Es gibt kein y mit $A^T y \le c$ und $b^T y \ge z$.

Es gilt also 2.: $\exists \hat{y} \geq 0$ mit $\hat{A}^T \hat{y} = 0$ und $\hat{b}^T \hat{y} < 0$, wobei

$$\hat{A} := \begin{pmatrix} A^T \\ -b^T \end{pmatrix}, \quad \hat{b} := \begin{pmatrix} c \\ -z \end{pmatrix}, \quad \hat{x} := y, \quad \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} := \hat{y}.$$

Das bedeutet aber gerade, daß es $x \geq 0$ und $\lambda \geq 0$ gibt mit

$$Ax = \lambda b \text{ und } c^T x < \lambda z.$$

Falls $\lambda > 0$, dann gilt $Ax' = b$ und $c^T x' < z$ mit $x' = \frac{1}{\lambda} x$. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von z.

Falls aber $\lambda = 0$, dann ist $A(x^* + x) = b$ und $c^T(x^* + x) = z + c^T x < z$. Das ist auch ein Widerspruch zur Minimalität von z. $\square$