Geometrie des Linearen Programmierens

Theorem A

Sei $P = \{ x \mid Ax = b,\, x \geq 0 \}$.

$\min\{ c^T x \mid x \in P \}$ sei endlich (d.h., es existiere).

Dann gibt es für jedes $x \in P$ eine Ecke $x' \in P$ mit

$$c^T x' \leq c^T x.$$

Korollar

Das Minimum wird (auch) in einer Ecke angenommen.

Beweis

Sei $P = \{\, x \mid Ax = b,\, x \geq 0\}$.

Wenn $x \in P$ bereits eine Ecke ist, dann $x' := x$.

Anderenfalls gibt es ein $y \neq 0$ mit $x + y, x - y \in P$.

Es gilt $Ay = 0$, denn $A(x + y) = A(x - y) = b$.

O.B.d.A. sei $c^T y \leq 0$ (sonst nehme $-y$).

Falls $c^T y = 0$, existiere ein j mit $y_j < 0$ (sonst nehme $-y$).

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen nun, daß $y \geq 0$ nicht gelten kann:

Wenn doch, dann $c^T y < 0$.

Dann ist $x + \lambda y \in P$ für alle $\lambda \geq 0$, denn $A(x + \lambda y) = b$ wegen $Ay = 0$.

Aber: $c^T(x + \lambda y) = c^T x + \lambda c^T y \to -\infty$ für $\lambda \to \infty$.

Also ist $\min\{\, c^T x \mid x \in P\}$ nicht endlich. Widerspruch.

Beweis (Fortsetzung)

Es gibt ein j mit $y_j < 0$.

- Wähle $\lambda = \min\left\{ -\frac{x_j}{y_j} \,\middle|\, y_j < 0 \right\} = -\frac{x_k}{y_k}$.
- Dies ist das größte λ mit $x + \lambda y \geq 0$.
- $x + \lambda y \in P$, denn $Ay = 0 \Rightarrow A(x + \lambda y) = b$.
- $(x + \lambda y)_k = 0$, aber $x_k > 0$.

Ersetze jetzt x durch $x + \lambda y$.

Da es nur n Komponenten gibt, kann nach höchstens n Iterationen kein weiteres y mehr existieren und x muß eine Ecke sein. $\square$

Ecken und Basen

Theorem B

Sei $P = \{\, x \mid Ax = b,\, x \geq 0 \,\}$ und $x \in P$. Mit A_x bezeichnen wir die Untermatrix von A, die aus den Spalten j besteht, für die $x_j > 0$ gilt.

Dann ist x genau dann eine Ecke von P, wenn die Spalten von A_x linear unabhängig sind.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Korollar Es gibt nur endlich viele Ecken.