Markierungsalgorithmen

LRU und FWF sind Markierungsalgorithmen.

Theorem

Ein Markierungsalgorithmus ist k-competitive.

Beweis

Idee: Alle markierten Seiten bleiben im Cache.

Nur ein Seitenfehler pro Markierung.

Nur k Seitenfehler pro Phase.

Jeder Algorithmus mindestens ein Seitenfehler pro Phase (ausser letzte).

LFU ist nicht kompetitiv

Seitenzugriffe:

$$p_1^t, p_2^t, \ldots p_{k-1}^t, (p_k, p_{k+1})^{t-1}$$

LFU verursacht $2(t-1)$ Seitenfehler.

FIFO oder FWF (selbst mit nur zwei Seiten) nur $k+1$ Fehler.

LFU ist nicht c-kompetitiv für jedes $c \in \mathbf{N}$.

LRU und FWF sind k-kompetitiv

Satz

LRU und FWF sind Markierungsalgorithmen.

Beweis

FWF: Genau die markierten Seiten sind im Cache.

LRU: (Idee) Die zuletzt zugegriffenen Seiten sind markiert.

Korollar

LRU und FWF sind k-kompetitiv

Eine untere Schranke

Satz

Ein deterministischer Online-Algorithmus für das Cache-Problem hat mindestens einen competitive factor k.

Beweis

(Idee) Greife auf $k+1$ verschiedene Seiten zu und danach m mal immer auf die Seite, die gerade verdrängt wurde.

$\rightarrow m+1$ Seitenfehler!

LFD hat höchstens $k+1+m/k$ Seitenfehler.

Mache m sehr groß.

Randomisierte Online-Algorithmen

$C(I)$ ist jetzt eine Zufallsvariable.

Ein Algorithmus ist c-kompetitiv, wenn stets

$$E(C(I)) \leq c \cdot C^*(I) + O(1).$$

Ein „Gegner“ kennt den Algorithmus, aber nicht die Zufallsbits.

Kannte er die Zufallsbits, würde Randomisierung nicht helfen.

Zufällige Verdrängungsstrategien

Wir betrachten folgenden Algorithmus:

Bei einem Seitenfehler wird eine zufällige gewählte nicht markierte Seite verdrängt.

Satz

Dieser Algorithmus ist $2H_k$-kompetitiv.

$H_k = \ln k + O(1)$

Einige Bezeichnungen:

Eine unmarkierte Seite, auf die in der letzten Phase zugegriffen wurde, nennen wir eine vorherige Seite.

Eine unmarkierte Seite, die nicht vorherig ist nennen wir eine frische Seite.

Es sei

$$F = \sum_{t=1}^{T} f_t$$

mit f_t = Anzahl der frischen Seiten, auf die in der $t$ten Phase zugegriffen wird und T = Anzahl der Phasen.

Lemma

$E(C(I)) \leq F \cdot H_k$.

Beweis

Betrachte die $t$te Phase. Es gibt f_t Seitenfehler bei Zugriffen auf frische Seiten.

Anfang der Phase: Alle k Seiten im Cache vorherig.

In der Phase wird auf k unterschiedliche Seiten zugegriffen. Davon sind $s = k - f_t$ vorherige Seiten.

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{f_t}{k+1-i} \leq \sum_{i=2}^{k} \frac{f_t}{i} = f_t(H_k - 1)$$

Lemma

Eine optimale Strategie verursacht mindestens $\frac{1}{2}(F + k)$ Seitenfehler.

Beweis

Übungsaufgabe.

Aus beiden Lemmata folgt der Beweis.