Runden

Gegeben ein ϵ, müssen wir $q_1, \ldots, q_n$ so bestimmen, daß

$$\frac{F^*(I) - F^*(I')}{F^*(I)} \leq \epsilon$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} |S^i| \leq u(n, 1/\epsilon)$$

gilt, wobei u ein Polynom ist.

Falls wir S^{i+1} aus S^i in Zeit polynomiell in $|S^i|$ berechnen können, dann haben wir ein FPTAS.

Runden

$$\frac{F^*(I) - F^*(I')}{F^*(I)} \leq \epsilon$$

können wir erzielen, durch

$$\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i| \leq \epsilon F^*(I). \qquad (*)$$

Wir definieren

$$q_i = \lfloor p_i/(\epsilon L/n) \rfloor \epsilon L/n.$$

Alle q_i sind dadurch ein Vielfaches von $\epsilon L/n$ und unterscheiden sich von p_i um höchstens $\epsilon L/n$. Das erfüllt $(*)$.

L ist eine geeignete untere Schranke für $F^*(I)$. Wir können immer $L := \max\{p_i\}$ wählen.

Runden

$$q_i = \lfloor p_i/(\epsilon L/n) \rfloor \epsilon L/n.$$

Alle q_i sind ein Vielfaches von $\epsilon L/n$.

Wie groß kann $|S^i|$ werden?

Wegen $p_j \leq L$, ist der Wert der Zielfunktion jeder zulässigen Einschränkung in S^i höchstens $i \cdot L$. Die Zielfunktionswerte sind Vielfache von $\epsilon L/n$.

Es gibt also höchstens $\left\lceil iL \Big/ \epsilon L/n \right\rceil = O(i \cdot n/\epsilon)$ verschiedene Elemente in S^i.

(Gleiche Zielfunktionswerte kommen nicht vor, wegen Dominanz.)

Runden

Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} |S^i| = O(n^3/\epsilon).$$

Das ergibt ein FPTAS in $O(n^3/\epsilon)$ Zeit unter folgenden Voraussetzungen:

- Dominanz in linearer Zeit entscheidbar
- S^{i+1} aus S^i in $O(|S^i|)$ Schritten berechenbar
- Eine untere Schranke $L \geq \max\{p_i\}$
- Zum allgemeinen Schema passend

Beispiel

Wir haben einen Rucksack der Kapazität 1112 und Gegenstände deren Größe und Wert $1, 2, 10, 100, 1000$ ist. Wir wählen $\epsilon = 0.1$.

$L = \max\{p_i\} = 1000$. Wir runden auf Vielfache von $\epsilon L/n = 0.1 \cdot 1000/5 = 20$. Die q_i sind daher $0, 0, 0, 100, 1000$.

Wir erhalten
$S^5 = \{(0,0,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1), (0,0,0,1,1)\}$.

Die optimale Lösung von I' ist $(0,0,0,1,1)$ mit Zielwert 1100.

Die eigentliche optimale Lösung ist 1112, da wir den Rucksack ganz füllen können.