Ecken und Basen

Theorem B

Sei $P = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$ und $x \in P$. Mit A_x bezeichnen wir die Untermatrix von A, die aus den Spalten j besteht, für die $x_j > 0$ gilt.

Dann ist x genau dann eine Ecke von P, wenn die Spalten von A_x linear unabhängig sind.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Korollar Es gibt nur endlich viele Ecken.

Beweis

„$\Longleftarrow$“

Nehmen wir an, x sei keine Ecke. Es gibt also ein $y \neq 0$ mit $x + y, x - y \in P$. Sei A_y die Untermatrix, die zu den nicht-Null-Komponenten von y gehört.

- Aus $A(x + y) = A(x - y) = b$ folgt wieder $Ay = 0$.
  Wegen $y \neq 0$ hat A_y linear abhängige Spalten.
- $x_j = 0 \Rightarrow y_j = 0$, denn $x + y \geq 0$ und $x - y \geq 0$.
  Daher ist A_y eine Untermatrix von A_x.

Dann hat auch A_x linear abhängige Spalten.

Beweis (Fortsetzung)

„$\Longrightarrow$“

Nehmen wir an, A_x hat linear abhängige Spalten. Dann gibt es ein $y \neq 0$ mit $A_x y = 0$.

Durch Erweiterung mit 0-Komponenten erhalten wir ein $y \neq 0$ mit $Ay = 0$ und

$$x_j = 0 \Rightarrow y_j = 0.$$

Für ein genügend kleines $\epsilon > 0$ muß dann $x + \epsilon y \in p$ und $x - \epsilon y \in P$ gelten.

Also ist x keine Ecke! $\Box$

Basen

Sei $P = \{\, x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \,\}$, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

Für $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei A_B die Untermatrix von A, die aus allen Spalten in B besteht.

1. Falls $B = \{\, j \mid x_j > 0 \,\}$ für ein $x \in P$, dann $A_B = A_x$.
2. Falls x eine Ecke von P ist, dann ist A_x eine Matrix mit vollem Spaltenrang $\leq m$.
3. Wir nehmen ab jetzt an, daß $\mathrm{Rang}(A) = m$ gilt, denn sonst gibt es eine redundante Gleichung, die eliminiert werden kann.
4. A_x läßt sich immer zu einer quadratischen Matrix A_B mit m linear unabhängigen Spalten erweitern.
5. Eine quadratische Matrix A_B mit vollem Rang heißt *Basis*.

Basen

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ mit } B = \{1, 3, 4\} \text{ ist eine Basis}$$

Sei A_B eine Basis und $N = \{1, \ldots, n\} - B$.

Die Variablen in B heißen *Basisvariablen* und die Variablen in N heißen *Nicht-Basisvariablen*.

Ax kann als $A_B x_B + A_N x_N$ geschrieben werden und daher

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

für $x \in P$ (denn $A_B x_B + A_N x_N = b$).

Wenn x eine Ecke zu A_B ist, dann ist $A_B x_B = b$ wegen $x_N = 0$.

Die Zielfunktion läßt sich schreiben als:

$$\begin{aligned} c^T x &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T A_B^{-1} b + \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)}_{\bar{c}^T} x_N \end{aligned}$$

Der Simplex-Algorithmus

$$c^T x = c_B^T A_B^{-1} b + \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)}_{\bar{c}^T} x_N$$

Falls $\bar{c} \geq 0$, dann ist $x \in P$ eine optimale Lösung.

Sei $x_B = A_B^{-1} b$ und $x_N = 0$ die zu A_B gehörige Ecke. Insbesondere gelte $x \in P$, also $x_B \geq 0$.

Falls $x_j > 0$ für alle $j \in B$, dann ist A_B *nicht entartet*, andernfalls *entartet*. Wir nehmen zunächst an, alle Basen seien nicht entartet.

Wähle $j \in N$ mit $\bar{c}_j < 0$
$x_j := x_j + \lambda$, $x_B := A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$
für ein maximales λ, so daß $x_B \geq 0$
Wähle $k \in B$ mit $x_k = 0$
$B := B \cup \{j\} - \{k\}$, $N := \{1, \ldots, n\} - B$

Der Simplex-Algorithmus

Wähle $j \in N$ mit $\bar{c}_j < 0$
$x_j := x_j + \lambda$, $x_B := A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$
für ein maximales λ, so daß $x_B \geq 0$
Wähle $k \in B$ mit $x_k = 0$
$B := B \cup \{j\} - \{k\}$, $N := \{1, \ldots, n\} - B$

Wir erhalten eine neue Basis A_B mit einem neuen Vektor x und einer kleineren Zielfunktion $c^T x$:

$$c^T x = c_B^T A_B^{-1} b + \bar{c}^T x_N$$

Da es nur endlich viele Basen gibt, kann man durch Wiederholen in endlicher Zeit eine optimale Lösung finden.

Beispiel

Minimiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geq 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir wählen folgende Basis A_B:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} -10 & 15 & -3 \\ 35 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \quad x_B = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \frac{1}{85}\begin{pmatrix} -10 & 15 & -3 \\ 35 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \quad x_B = \frac{1}{85}\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 51 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N =$$

$$1 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{85}\begin{pmatrix} -10 & 15 & -3 \\ 35 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{9}{17}$$

Da $\bar{c} \geq 0$ ist $x = \frac{1}{85}\begin{pmatrix} 11 & 21 & 51 & 0 \end{pmatrix}^T$ optimal.