Datenstrukturen und Algorithmen, SS 2019
Prof. Dr. P. Rossmanith
S. Dollase, J. Dreier, H. Lotze

Datum: 11.6.2019

Übungsblatt mit Lösungen 13

Aufgabe T45

Schätzen Sie $\log(n^2 + 3n)$ bis auf einen additiven Term von $O(1/n)$ ab.

Lösungsvorschlag

Mit der wichtigen Taylorreihe $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ für $-1 < x \leq 1$ gilt:

$$\log\Big(n^2 + 3n\Big) = \log\Big(n^2\Big(1 + \frac{3}{n}\Big)\Big) = 2\log n + \log\Big(1 + \frac{3}{n}\Big) = 2\log n + O\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

Aufgabe T46

Was passiert, wenn wir die zig-zig-Operation für Splay-Bäume nicht wie in der Vorlesung gezeigt implementieren, sondern stattdessen zwei einfache zig-Schritte hintereinander ausführen? Zeigen Sie, dass n Operationen $\Omega(n^2)$ Zeit benötigen können.

Lösungsvorschlag

Wir fügen $-n, \ldots, -1$ in dieser Reihenfolge einen leeren Splaybaum ein. Dieser ist zu einer linearen Liste verkümmert, welche (von der Wurzel aus gelesen) die Werte $-1, \ldots, -n$ enthält. Dann suchen und löschen wir $-n$. Das dauert $\Theta(n)$ Schritte. Nachdem wir $-n$ splayen ist der Baum eine Liste Werten $-n, -1, \ldots, -(n-1)$ und nachdem wir $-n$ löschen ist der Baum eine Liste mit den Werten $-1, \ldots, -(n-1)$.

Das können wir immer wiederholen: Lösche $-n, -n+1, -n+2, \ldots, -1$ in dieser Reihenfolge. Zusammen sind das nur $O(n)$ Operationen, aber die Laufzeit ist $\Omega(n^2)$.

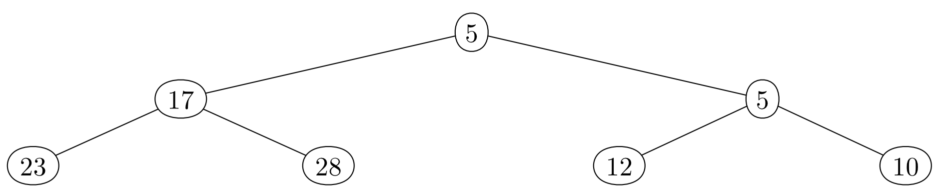
Aufgabe T47

Fügen Sie die Zahlen 23, 12, 5, 17, 28, 10 und 5 in einen anfangs leeren Min-Heap ein (die kleineren Zahlen sind oben). Wie sieht dieser aus?

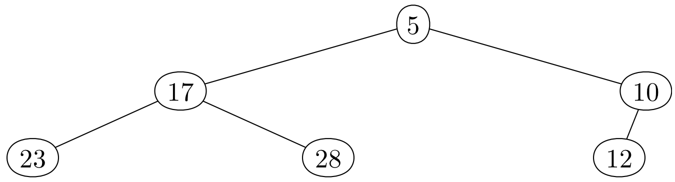
Entfernen Sie jetzt nacheinander dreimal die kleinste Zahl aus dem Heap. Wie sieht er nach jeder der drei Operationen aus?

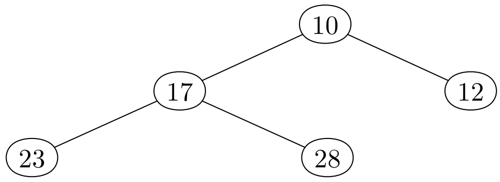
Lösungsvorschlag

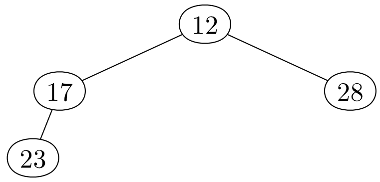
Der entstehende Heap sieht so aus:



Die weiteren Heaps nach jeweiligem Entfernen des kleinsten Elements sind:

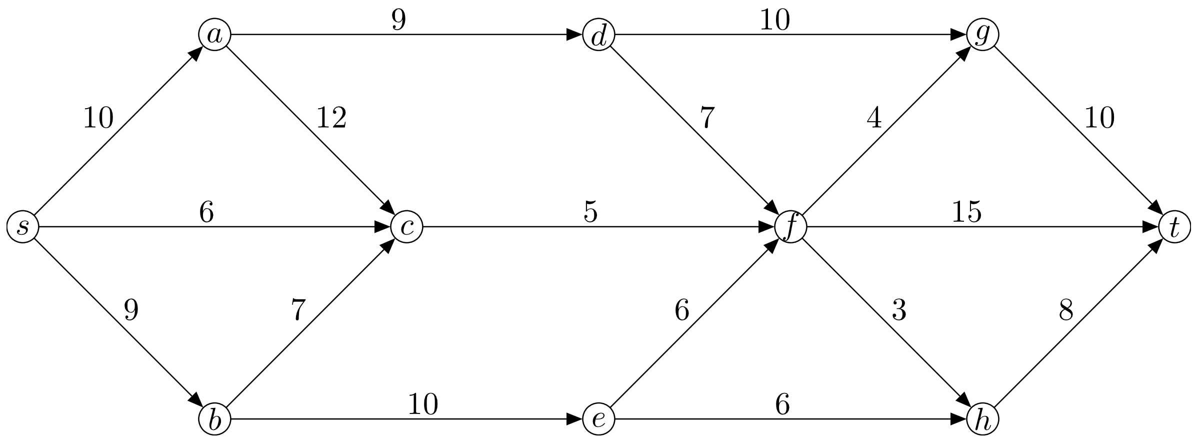




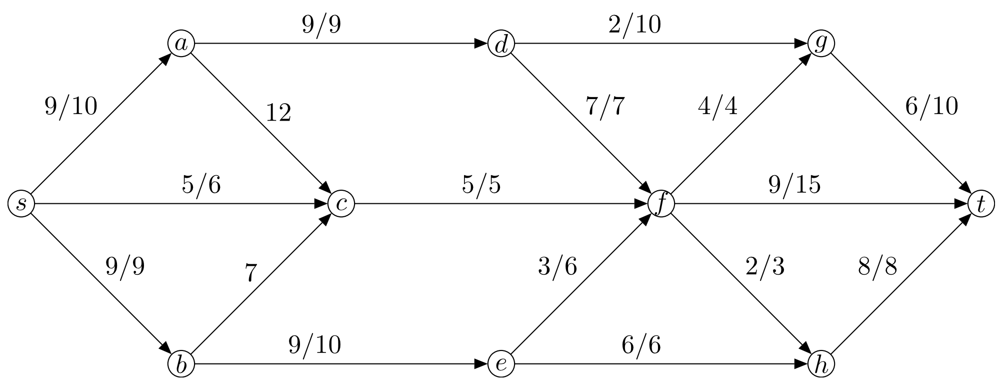


Aufgabe T48

Berechnen Sie einen maximalen Fluss in folgendem Flussnetzwerk und finden Sie einen minimalen Schnitt:



Lösungsvorschlag



Ein minimaler Schnitt hat $S = \{s, a, c\}$.

* * * Viel Erfolg bei der Klausur! * * *