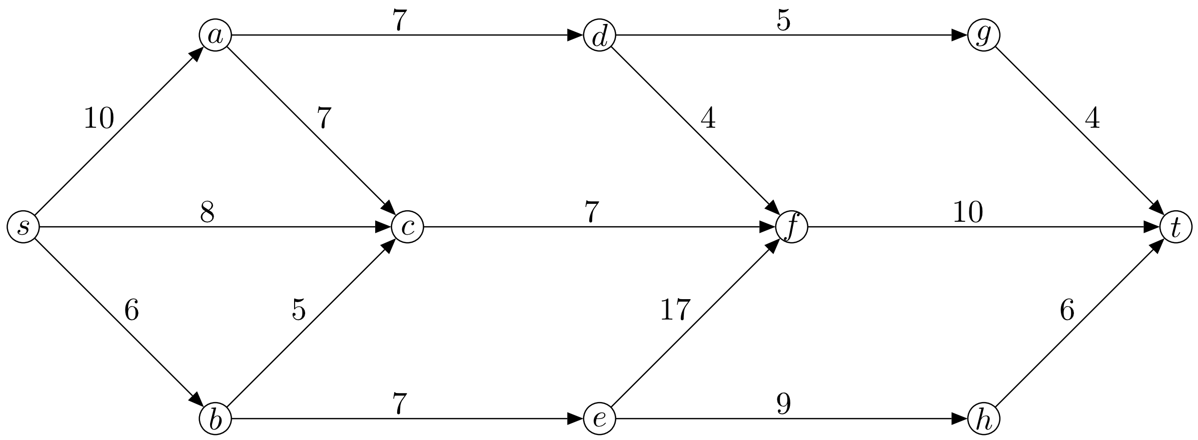
RWTH Aachen **SS 2018**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Blatt 12
Rossmanith–Dreier–Kuinke 16.7.2018

Übung zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen

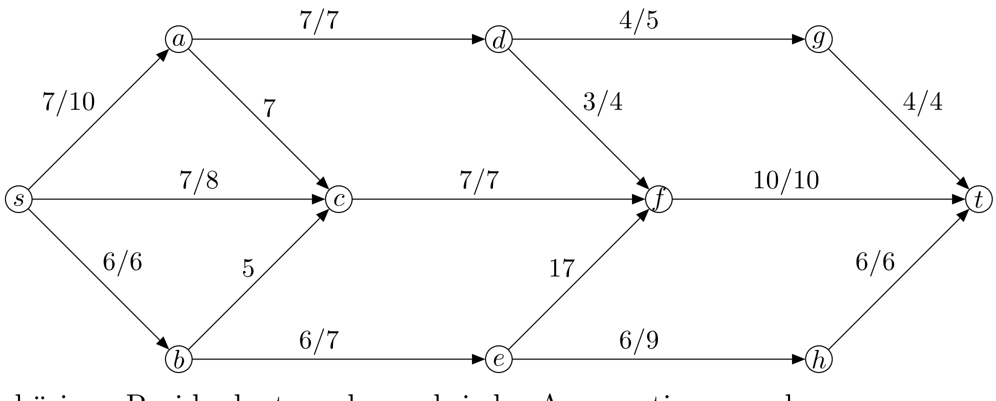
Aufgabe T24

Wenden Sie die Ford–Fulkerson-Methode auf das folgende Flußnetzwerk an. Zeichnen Sie nach jeder Augmentierung das resultierende Residualnetzwerk. Machen Sie die ersten ein bis zwei Augmentierungen im Tutorium und den Rest als Hausaufgabe.

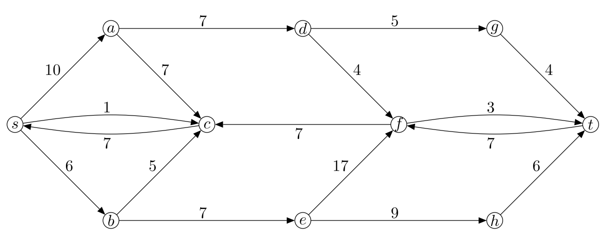


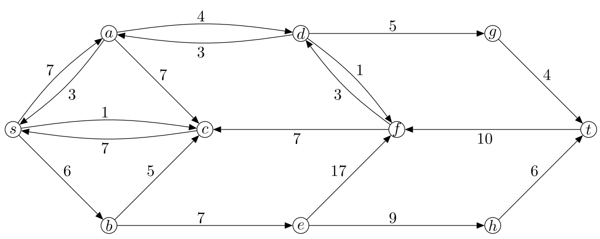
Lösungsvorschlag:

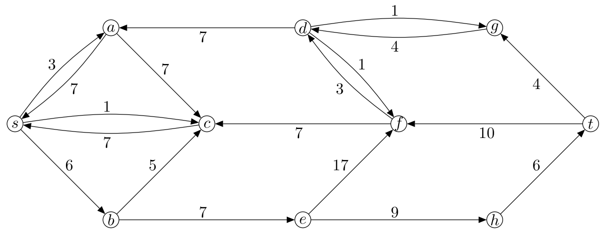
Ein möglicher maximaler Fluß ist:

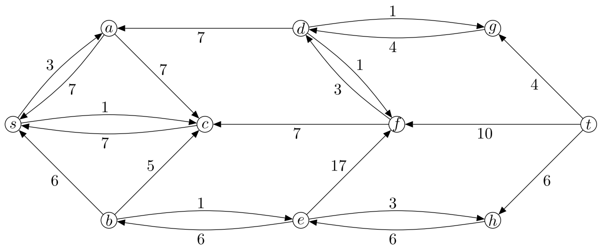


Die zugehörigen Residualnetzwerke nach jeder Augmentierung sehen so aus.









Aufgabe T25

Manche Städte bilden Partnerschaften mit anderen Städten (Aachen zum Beispiel mit Liège, Toledo und weiteren). Diese Beziehungen lassen sich gut durch einen Graphen modellieren.

Nun soll im *Internationalen Jahr der Städtefreundschaften* je eine Feier zwischen allen befreundeten Städtepaaren durchgeführt werden. Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass alle Feiern dasselbe kosten.

Nun hat jede Stadt ein Budget, welches besagt für wieviele eigene Feiern sie Geld spenden kann. Dies soll stets eine ganze Zahl sein.

Ihr Problem ist es nun, einen Plan zu finden, der besagt welche Stadt für welche Feiern zahlen soll, ohne dass Budgets überschritten werden.

Können Sie dies als Flussproblem modellieren?

Lösungsvorschlag:

Zu Erst erstellen wir einen bipartiten Graphen. In der Menge A gibt es einen Knoten für jede Stadt, und in der Menge B einen Knoten für jede Feier die stattfinden soll. Wir fügen eine gerichtete Kante (a, b), mit $a \in A$ und $b \in B$ ein, falls die Stadt a teil der Feier b ist. Dieser Kante geben wir Kapazität 1. Als nächstes fügen wir eine Sänke t ein und eine gerichtete Kante (b, t) für alle $b \in B$, und geben ihr Kapazität 1. Als letztes fügen wir eine Quelle s ein und Kanten (s, a) für alle $a \in A$ und geben diesen als Kapazität das Budget von a.

Falls es nun einen Fluss der Größe $|B|$ gibt, sind alle ausgehenden Kanten von B saturiert, und damit jede Feier finanziert. Die von s ausgehenden Kantenkapazitäten sorgen dafür das kein Budget überschritten wird. Welche Stadt welche Feier finanziert lässt sich an den saturierten eingehenden Kanten der Knoten von B ablesen.

Aufgabe H24 (0 Punkte)

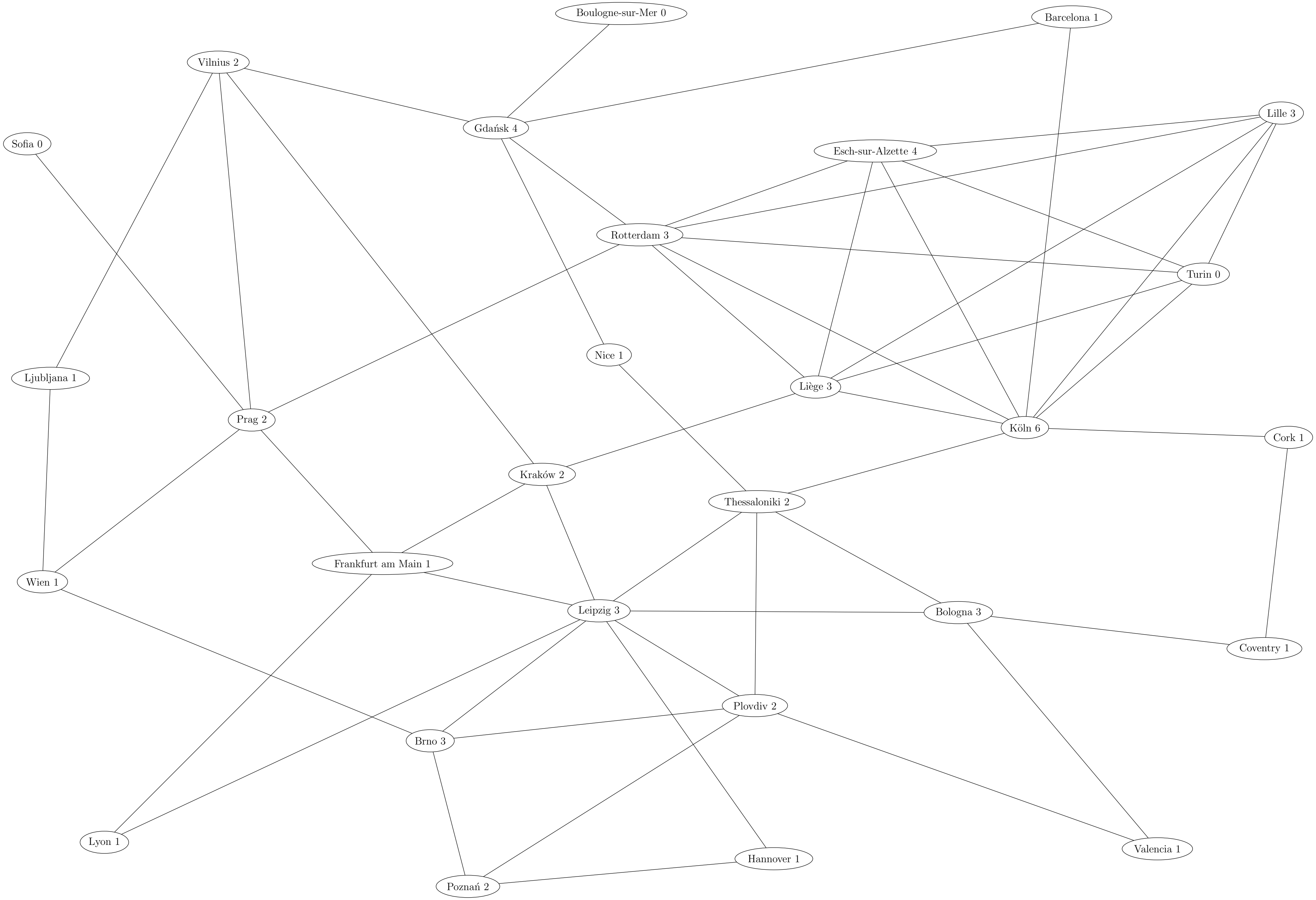
Führen Sie T24 fort.

Lösungsvorschlag:

Siehe Lösung zu T24.

Aufgabe H25 (0 Punkte)

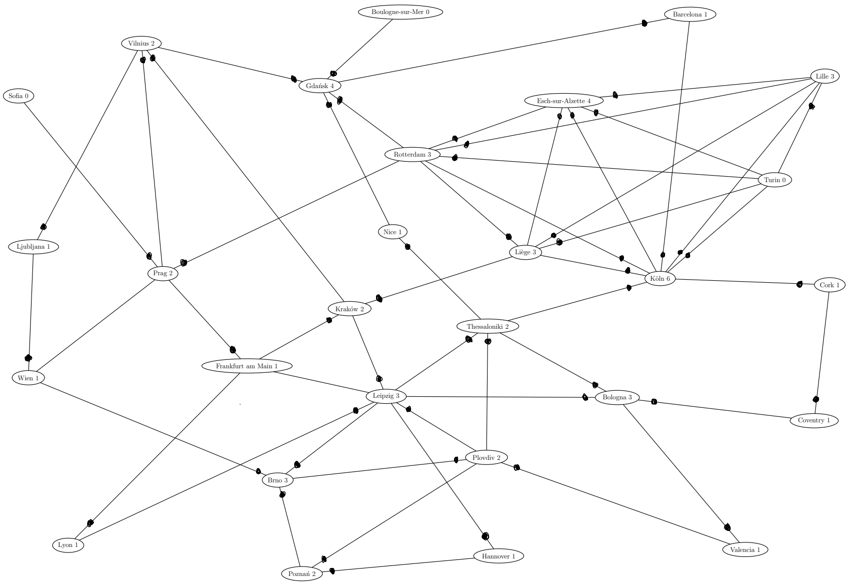
Finden Sie einen Plan, analog zur Aufgabe T25, für das kleinere Städtepartnerschaftsmodell auf der Rückseite. Die Zahlen geben das Budget für jede Stadt wieder. Zeichnen Sie die gefundene Lösung ein, indem Sie für jede Kante markieren, welche der beiden Städte für diese Feier aufkommt.


Boulogne-sur-Mer 0
Barcelona 1
Vilnius 2
Lille 3
Gdańsk 4
Sofia 0
Esch-sur-Alzette 4
Rotterdam 3
Turin 0
Nice 1
Ljubljana 1
Liège 3
Prag 2
Köln 6
Cork 1
Kraków 2
Thessaloniki 2
Frankfurt am Main 1
Wien 1
Leipzig 3
Bologna 3
Coventry 1
Plovdiv 2
Brno 3
Lyon 1
Hannover 1
Valencia 1
Poznań 2

Lösungsvorschlag:

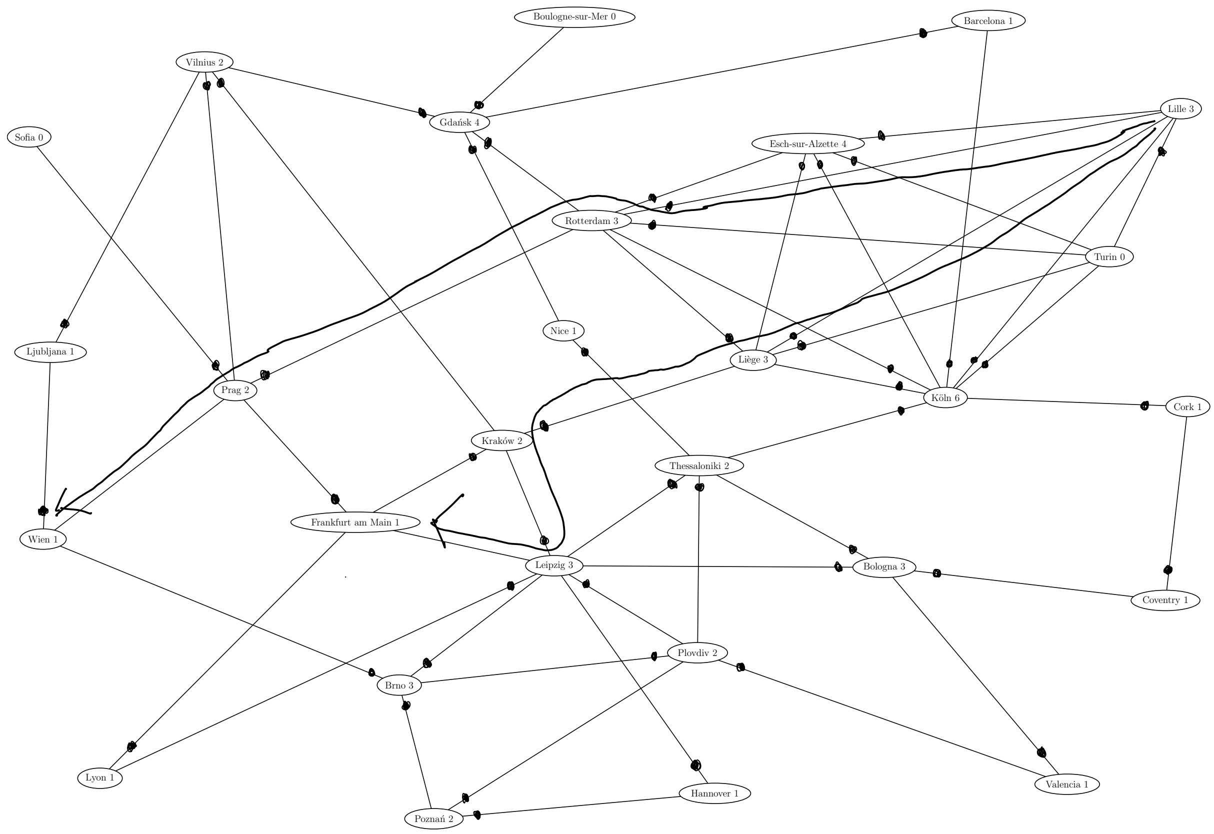
Diese Aufgabe läßt sich recht leicht per Hand lösen. Man beginnt einfach die Finanzierung für Partys beliebig festzulegen (indem man mit Bleistift die verantwortliche Stadt an der Kante markiert) und achtet lediglich darauf, daß die Budgets nicht überzogen werden. Irgendwann kann man so nicht weitermachen und es verbleiben unfinanzierte Feste bestehen (aber wahrscheinlich nur sehr wenige).

In unserem Beispiel könnte der vorläufige Plan so aussehen.



Leider sind die Feiern zwischen Wien und Prag, sowie zwischen Frankfurt und Leipzig noch nicht finanziert.

Jetzt stellen wir uns das zugrundeliegende Residualnetzwerk vor und finden einen augmentierenden Pfad. Dies entspricht in diesem Fall einem Pfad entlang dessen die Finanzierungsverantwortlichkeit „umgeschoben“ wird. Dadurch wird der Fluß um eins erhöht.



Hier können augmentierende Pfade von Lille (das noch ein Budget von zwei übrig behalten hatte) zu Wien und Frankfurt finden. Nachdem wir der Fluß entlang dieser Pfade augmentiert haben, sind alle Partys finanziert.