RWTH Aachen
Lehrgebiet Theoretische Informatik
Rossmanith–Hensel–Kuinke–Sánchez

SS 2016
Blatt 11
4. Juli 2016

Übung zur Vorlesung Datenstrukturen und Algorithmen

Aufgabe T33

Beweisen Sie den zweiten Punkt von Lemma A: $f(X,Y) = -f(Y,X)$ für $X, Y \subseteq V$, falls f ein Fluß für $G = (V, E)$ ist.

Aufgabe T34

Ein Gemischtwarenladen will durch einen besonderen Rabatt die Umsätze steigern: Wer an der Kasse zwei Artikel zum Kauf vorlegt, deren Gesamtpreis auf 11, 33, 55, 77 oder 99 Cent endet, erhält zusätzlich einen Gutschein.

Entwerfen Sei einen Algorithmus, der zu einer Menge von Preisen eine optimale Einkaufsstrategie angibt, welche die Anzahl der erhaltenen Gutscheine maximiert.

Aufgabe T35

Die internationale Raumstation ISS steht auch (zahlungswilligen) Weltraumtouristen offen. Sie sollen nun entscheiden, welche Touristen Sie mitnehmen wollen.

Gegeben sind Kandidaten $K_1, \ldots, K_n$, welche jeweils bereit sind, $k_1, \ldots, k_n$ US-Dollar zu zahlen. Allerdings sind sie anspruchsvoll und erwarten auf der ISS auch ein Unterhaltungsprogramm. Zu diesem Zweck stehen eine Menge „Spielzeuge" $Z_1, \ldots, Z_m$ zur Verfügung, bei deren Mitnahme allerdings jeweils Kosten $z_1, \ldots, z_m$ entstehen. Der Kandidat K_i ist nur bereit zu zahlen, wenn die Spielzeuge $R_i \subseteq \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ mitgenommen werden.

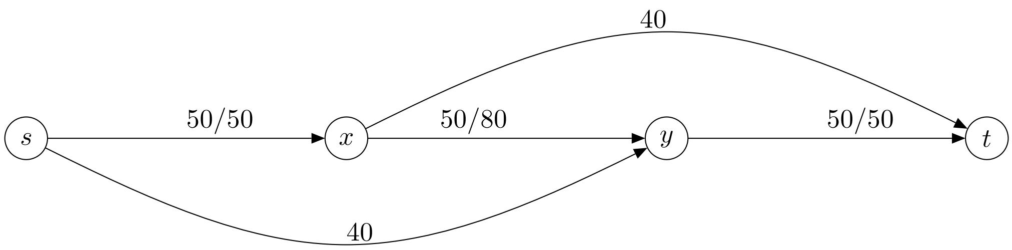
Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, der eine Menge von Kandidaten auswählt, um die Einnahmen zu maximieren. Jedes Spielzeug muß nur einmal mitgenommen werden, selbst wenn mehrere es benutzen wollen.

Aufgabe H29 (8 Punkte)

Beweisen Sie den dritten Punkt von Lemma A: $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ für $X, Y, Z \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$, falls f ein Fluß für $G = (V, E)$ ist.

Aufgabe H30 (7 Punkte)

Gegeben ist folgendes Flußnetzwerk G und ein zugehöriger Fluß f. Wie sieht das Residualnetzwerk G_f aus? Was ist der maximale Fluß?



Aufgabe H31 (15 Punkte)

Der niederländische Fritten-Franchise „Vet Druipend“ hat die Stadt Heinsberg erschlossen, dabei jedoch den Markt übersättigt: An vielen Straßenkreuzungen stehen schon mehrere Pommesmobile, in einigen Straßen macht sich „Vet Druipend“ also schon selbst Konkurrenz! Das soll sich nun ändern: Künftig werden anstatt Kreuzungen einzelne Straßen von jeweils nur noch einem Mobil bedient. Aus Kostengründen soll diese Umstrukturierung geschehen, indem Mobile von den Kreuzungen in anliegende Straßen geschoben werden—natürlich soll weiterhin ganz Heinsberg bedient werden, es muß also jede Straße abgedeckt werden (Mobile, die bei dieser Maßnahme übrigbleiben, werden von „Vet Druipend“ abgestoßen).

Vereinfachen wir das Problem zu einem Graphenproblem. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit einer Knotenbeschriftung $p\colon V \to \mathbf{N}$. Jeder Knoten $v \in V$ kann bis zu $p(v)$ benachbarte Kanten abdecken. Gefragt ist, ob alle Kanten des Graphen so abgedeckt werden können. Formal suchen wir eine Funktion $g\colon E \to V$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $g(e) = v \Rightarrow e$ ist inzident zu v
2. $|g^{-1}(v)| \leq p(v)$ für alle $v \in V$

Beschreiben Sie, wie das obige Problem als ganzzahliges Flußproblem modelliert werden kann. Genauer soll der maximale, ganzzahlige Fluß betraglich genau dann der Anzahl der Kanten entsprechen, falls eine solche Funktion g existiert.

In diesem Beispiel gibt es 38 Frittenmobile auf 19 Kreuzungen, welche auf die angrenzenden 38 Straßen verschoben werden sollen. Knapp, nicht wahr? Geht es dennoch? (Dieses Beispiel ist nicht Teil der Hausaufgabe)