

Übung zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabe T26

Gegen Ende Ihres Studiums haben sich bei Ihnen eine Reihe von Rechnungen aufgetürmt, die Sie nun mit Ihrem knappen Monatsbudget $b \in \mathbb{N}$ begleichen müssen. Jede der n Rechnungen i , die Sie im aktuellen Monat begleichen, kostet Sie einen Betrag von $w_i \in \mathbb{N}$ Euro. Sollten Sie die Rechnung später begleichen, so zahlen Sie einen Betrag von $2w_i$ (der Zeitpunkt ist dann allerdings egal).

Natürlich möchten Sie insgesamt so wenig Geld wie möglich für die Strafgebühren aufwenden: Sie fragen sich also, ob Sie alle Rechnungen so begleichen können, daß insgesamt höchstens $k \in \mathbb{N}$ Gebühren anfallen.

Zeigen Sie, daß das SCHULDEN-Problem NP-schwer ist.

Aufgabe T27

Überraschenderweise finden Sie sich nach erfolgreichem Abschluß Ihres Studiums als Direktor eines Museums für moderne Kunst. Ihre erste Aufgabe ist es, den Rundgang der Nachtwache zu planen. Da die Nachtwache ehrenamtlich durch einen betagten Rentner besetzt ist, ist zwingend notwendig, daß die Strecke des Rundgangs so kurz wie möglich ist. Trotzdem muss jeder letzte Winkel des Museums von diesem Rundgang aus mindestens einmal sichtbar sein. Formal ist das Problem wie folgt definiert:

MUSEUMSNACHTWACHE

Eingabe: Ein Museumsgrundriß M als Menge von Polygonen, eine Zahl $l \in \mathbb{Q}$.

Problem: Gibt es eine Rundtour der Länge höchstens l , von der aus jeder Punkt des Museums sichtbar ist?

Hinweis: Für diese Aufgabe können Sie annehmen, daß METRISCHES TSP NP-vollständig ist.

METRISCHES TSP

Eingabe: Eine Menge von Punkten V in der euklidischen Ebene und eine Zahl $l \in \mathbb{Q}$.

Problem: Gibt es eine Tour der Länge höchstens l , die alle Punkte besucht?

Aufgabe H29 (3+7 Punkte)

Sie haben als Willkommensgeschenk von der Museumsbelegschaft einen Essensgutschein mit Wert k für ein nobles Restaurant bekommen. Das Restaurant hat eine Speisekarte mit n Gerichten. Sie möchten sich in dem Restaurant von der Speisekarte ein Menü zusammenstellen lassen, sodaß der Gutschein möglichst vollständig genutzt wird, ohne daß sie zusätzlich noch etwas zahlen müssen (die Schulden aus Aufgabe T26 zwingen Sie zu Sparsamkeit).

- a) Ist dieses Problem leicht lösbar und wenn ja, wie? Beweisen Sie andernfalls, daß es schwer ist.
- b) Geben Sie einen Algorithmus für das Problem an, der polynomiell ist in n und k . Wieso beweist dieser Algorithmus nicht, daß $P = NP$ ist?

Aufgabe H30 (10 Punkte)

Ihre Anstellung im Museum ist nicht von langer Dauer, ein peinlicher Zwischenfall mit Duchamps *Fountain* bereitete Ihrer Karriere ein unrühmliches Ende. Glücklicherweise finden Sie schnell eine neue Beschäftigung bei "Merkstein Mysteriöse Maschinen".

Sie stehen vor folgender Aufgabe: Ihnen wird die Spezifikation einer Mysteriöse Maschine mit n Zuständen vorgelegt. Eine Mysteriöse Maschine hat eine Reihe von Knöpfen, Rädern und Hebeln, mit denen der interne Zustand verändert werden kann. "Merkstein Mysteriöse Maschinen" liefert qualitativ hochwertige Mysteriöse Maschinen seit 1890, den jede Maschine wird vollständig auf ihre Funktionalität geprüft: dazu muss die Maschine probeweise in jeden der n Zustände versetzt werden. Um den Arbeitsprozess zu optimieren, sollen Sie nun eine möglichst kurze Reihenfolge von Bedienoperationen finden (in der Entscheidungsvariante: höchstens l Operationen), welche die Maschinen in jeden Zustand mindestens einmal versetzt.

Sie vermuten, daß dieses Problem NP-vollständig ist. Finden Sie einen Beweis, um Ihre Vorgesetzten von der Schwere Ihrer Aufgabe zu überzeugen (Ihre Anstellung soll schließlich länger als die vorherige dauern).