

## Übung zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

### Aufgabe T24

Wir betrachten das folgende Erfüllbarkeitsproblem.

NOT-ALL-EQUAL SAT

*Eingabe:* Eine aussagenlogische Formel  $\phi$  in 3KNF.

*Frage:* Gibt es eine erfüllende Belegung, so daß in jeder Klausel mindestens ein wahres und ein falsches Literal vorkommt?

1. Beweisen Sie, daß  $3\text{-SAT} \leq_p \text{NOT-ALL-EQUAL-SAT}$
2. Zeigen Sie nun, daß  $\text{NOT-ALL-EQUAL-SAT}$  auch dann noch NP-vollständig ist, wenn in den einzelnen Klauseln nur positive Literale (also keine negierten Variablen) verwendet werden dürfen.

### Aufgabe T25

Das Problem  $\text{INDUCED CYCLES}$  fragt, ob in einem gegebenen Graphen  $G$  mindestens  $k$  Knotendisjunkte Kreise existieren, die zudem noch unabhängig sind—d.h. diese Kreise sollen nicht durch Kanten untereinander verbunden sein. Beweisen Sie, daß dieses Problem NP-schwer ist, indem sie eine Reduktion von  $\text{INDUCED MATCHING}$  angeben (dessen schwere sollen Sie in H27 beweisen).

### Aufgabe H27 (15 Punkte)

Eine Kantenmenge  $M \subseteq E$  ist ein *Matching* in einem Graphen  $G = (V, E)$ , wenn für alle Kanten  $e_1, e_2 \in M$  gilt, daß  $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ . Ein Matching ist zudem ein *induced Matching*, wenn die Matchingkanten untereinander nicht durch Kanten in  $G$  verbunden sind.

Das Problem  $\text{INDUCED MATCHING}$  besteht nun darin, zu entscheiden ob ein induced Matching der Größe  $k$  in einem gegebenen Graphen  $G$  existiert. Dieses Problem wird in der Literatur auch als *risk-free marriage problem* bezeichnet: gesucht ist eine Zuteilung auf Ehen, so daß keiner der Ehepartner Interesse an einem Ehepartner einer anderen Ehe hat. Zeigen Sie, daß  $\text{INDEPENDENT SET} \leq_p \text{INDUCED MATCHING}$ .

### Aufgabe H28 (5 Punkte)

Ein *Hamiltonpfad* eines Graphen ist ein Pfad, der alle Knoten des Graphens genau einmal besucht. Das  $\text{HAMILTIONPFAD-PROBLEM}$  (HPP) besteht darin, einen solchen Pfad für einen gegebenen Graphen zu finden.

Analog ist beim  $1/2\text{-HAMILTIONPFAD-PROBLEM}$  ( $1/2\text{-HPP}$ ) ein Pfad gesucht, der genau die Hälfte der Knoten besucht. Zeigen Sie folgende Beziehung zwischen den beiden Problemen:

$$\text{HPP} \leq_p 1/2\text{-HPP}$$