Übung zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabe T26

Gegen Ende Ihres Studiums haben sich bei Ihnen eine Reihe von Rechnungen aufgetürmt, die Sie nun mit Ihrem knappen Monatsbudget $b \in \mathbb{N}$ begleichen müssen. Jede der n Rechnungen i, die Sie im aktuellen Monat begleichen, kostet Sie einen Betrag von $w_i \in \mathbb{N}$ Euro. Sollten Sie die Rechnung später begleichen, so zahlen Sie einen Betrag von $2w_i$ (der Zeitpunkt ist dann allerdings egal).

Natürlich möchten Sie insgesamt so wenig Geld wie möglich für die Strafgebühren aufwenden: Sie fragen sich also, ob Sie alle Rechnungen so begleichen können, daß insgesamt höchstens $k \in \mathbb{N}$ Gebühren anfallen.

Zeigen Sie, daß das Schulden-Problem NP-schwer ist.

Lösungsvorschlag.

Partition kann leicht polynomiell auf das oben beschriebene Schulden-Problem reduziert werden. Zu einer Eingabemenge $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ für Partition konstruieren wir eine Instanz für das Schulden-Problem wie folgt: Erzeuge eine Rechnung im Wert von w_i für jedes i. Außerdem sei das monatliche Budget gegeben durch $\frac{w}{2}$ für $w = \sum_i w_i$.

Nun ist die Partition-Instanz genau dann lösbar, wenn die konstruierte Schulden-Instanz eine Lösung hat, die nur $\frac{w}{2}$ Gebühren erzeugt.

Aufgabe T27

Überraschenderweise finden Sie sich nach erfolgreichem Abschluß Ihres Studiums als Direktor eines Museums für moderne Kunst. Ihre erste Aufgabe ist es, den Rundgang der Nachtwache zu planen. Da die Nachtwache ehrenamtlich durch einen betagten Rentner besetzt ist, ist zwingend notwendig, daß die Strecke des Rundgangs so kurz wie möglich ist. Trotzdem muss jeder letzte Winkel des Museums von diesem Rundgang aus mindestens einmal sichtbar sein. Formal ist das Problem wie folgt definiert:

Museumsnachtwache

Eingabe: Ein Museumsgrundriß M als Menge von Polygonen, eine Zahl $l \in \mathbb{Q}$.

Problem: Gibt es eine Rundtour der Länge höchstens l, von der aus jeder Punkt des Museums sichtbar ist?

Hinweis: Für diese Aufgabe können Sie annehmen, daß Metrisches TSP NP-vollständig ist.

METRISCHES TSP	
Eingabe:	Eine Menge von Punkten V in der euklidischen Ebene und eine Zahl $l \in \mathbb{Q}$.
Problem:	Gibt es eine Tour der Länge höchstens l, die alle Punkte besucht?

Lösungsvorschlag.

Hier wird ein Gadget benötigt, daß den Museumswärter zwingt sich sehr nahe an bestimmte Punkte zu bewegen. Das kann z.B. erreicht werden, indem kleine Räume mit nur einer einzigen "Tür" und einem toten Winkel konstruiert werden. Nun ist es nicht möglich, den Raum von außen komplett zu überblicken, daher ist der Wärter gezwungen, jeden dieser kleinen Räume zu betreten.

Nun ist eine Reduktion von metrischem TSP möglich. Für jeden Punkt im metrischen TSP erzeugen wir einen kleinen Raum im Museum, dessen Außenwände ein große Rechteck, welches alle diese kleinen Räume beinhaltet, bilden. Diese Räume müssen so klein sein, daß die Distanz zwischen zweier solcher Räume deutlich größer ist als der Umfang eines Raumes—dies kann durch Skalierung der Instanz leicht erreicht werden. Um eine optimale Route zu finden, muß der Wärter nun jeden Raum einmal besuchen (und eventuell auch einmal umkreisen, um die durch den Raum verdeckte Umgebung zu sehen). Eine solche Route lässt sich über die Reihenfolge der besuchten Räume definieren, die dann einer minimalen TSP-Tour entspricht.

Aufgabe H29 (3+7 Punkte)

Sie haben als Willkommensgeschenk von der Museumsbelegschaft einen Essensgutschein mit Wert k für ein nobles Restaurant bekommen. Das Restaurant hat eine Speisekarte mit n Gerichten. Sie möchten sich in dem Restaurant von der Speisekarte ein Menü zusammenstellen lassen, sodaß der Gutschein möglichst vollständig genutzt wird, ohne daß sie zusätzlich noch etwas zahlen müssen (die Schulden aus Aufgabe T26 zwingen Sie zu Sparsamkeit).

a) Ist dieses Problem leicht lösbar und wenn ja, wie? Beweisen Sie andernfalls, daß es schwer ist.

b) Geben Sie einen Algorithmus für das Problem an, der polynomiell ist in n und k. Wieso beweist dieser Algorithmus nicht, daß $P = NP$ ist?

Lösungsvorschlag.

a) Das Problem entspricht dem bekannten SUBSET-SUM-Problem. Gibt es aus einer gegebenen Menge von Zahlen $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ eine Teilmenge, die sich zu k aufsummieren.

b) Wir lösen das Problem mittels dynamischer Programmierung. Nehmen wir an, die Kosten der n Gerichte seien $c_1, \ldots, c_n$. Wir definieren die Funktion $D\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to$

$\{0, 1\}$, wobei $D(i, s) = 1$ genau dann sein soll, wenn es möglich ist, die eine Untermenge der Kosten $c_1, \ldots, c_i$ zu s zu summieren. Kurz:

$$D(i, s) = 1 \Leftrightarrow \exists i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{N}, 1 \leq r \leq i \text{ so daß } \sum 1 \leq j \leq r c_{i_j} = s$$

Hätten wir diese Funktion, so könnten wir den maximalen Wert $1 \leq x \leq k$ finden, bei dem $D(n, x) = 1$ ist und würden damit die Lösung x erhalten.

Als Beginn für die dynamische Programmierung bestimmen wir die Werte $D(1, x)$: dies ist einfach, denn $D(1, x)$ nimmt nur für $x = c_1$ den Wert 1 an. Nehmen wir nun an, wir haben die Werte $D(i, s)$ für alle $i < j$ und alle $s \leq k$ berechnet. Dann berechnen sich die Werte $D(j, s)$ für alle $0 \leq s \leq k$ wie folgt:

$$D(j, s) = 1 \Leftrightarrow D(i, s) = 1 \text{ oder } c_j = s \text{ oder } D(i, s - c_j) = 1 \tag{1}$$

Die Berechnung von D ist also in $O(nk)$ Zeit möglich. Das heißt jedoch nicht, das $P = NP$ ist, denn in der Eingabe wäre k Binärcodiert angegeben, diese Laufzeit ist also exponentiell in der Eingabelänge.

Aufgabe H30 (10 Punkte)

Ihre Anstellung im Museum ist nicht von langer Dauer, ein peinlicher Zwischenfall mit Duchamps *Fountain* bereitete Ihrer Karriere ein unrühmliches Ende. Glücklicherweise finden Sie schnell eine neue Beschäftigung bei "Merkstein Mysteriöse Maschinen".

Sie stehen vor folgender Aufgabe: Ihnen wird die Spezifikation einer Mysteriöse Maschine mit n Zuständen vorgelegt. Eine Mysteriöse Maschine hat eine Reihe von Knöpfen, Rädern und Hebeln, mit denen der interne Zustand verändert werden kann. "Merkstein Mysteriöse Maschinen" liefert qualitativ hochwertige Mysteriöse Maschinen seit 1890, den jede Maschine wird vollständig auf ihre Funktionalität geprüft: dazu muss die Maschine probeweise in jeden der n Zustände versetzt werden. Um den Arbeitsprozess zu optimieren, sollen Sie nun eine möglichst kurze Reihenfolge von Bedienoperationen finden (in der Entscheidungsvariante: höchstens l Operationen), welche die Maschinen in jeden Zustand mindestens einmal versetzt.

Sie vermuten, daß dieses Problem NP-vollständig ist. Finden Sie einen Beweis, um Ihre Vorgesetzten von der Schwere Ihrer Aufgabe zu überzeugen (Ihre Anstellung soll schließlich länger als die vorherige dauern).

Lösungsvorschlag.

Wir benutzen eine Reduktion von DIRECTED HAMILTONIAN PATH um die NP-Schwere von MYSTERY MASCHINE zu zeigen. Eine Instanz des ersteren Problems besteht schlicht aus einem gerichteten Graphen $G = (V, A)$ mit n Knoten. Wir konstruieren eine mysteriöse Maschine $\mathcal{M}$, die für jeden Knoten von G einen Zustand besitzt und für jede gerichtete Kante einen entsprechenden Übergang–die Maschine benötigt $\Delta^+(G) < n$ Bedienelemente, da jede ausgehende Kante durch eine Operation modeliert wird (unsere Maschine ist schlicht ein DEA). Nun hat G genau dann einen Hamiltonpfad, wenn $\mathcal{M}$ mit n Operationen getestet werden kann.