

Übung zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabe T24

Wir betrachten das folgende Erfüllbarkeitsproblem.

NOT-ALL-EQUAL SAT

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel ϕ in 3KNF.

Frage: Gibt es eine erfüllende Belegung, so daß in jeder Klausel mindestens ein wahres und ein falsches Literal vorkommt?

1. Beweisen Sie, daß $3\text{-SAT} \leq_p \text{NOT-ALL-EQUAL-SAT}$

Lösungsvorschlag.

Wir wandeln eine 3-SAT-Formel ϕ in eine Formel ϕ' um, so daß ϕ' genau dann Not-all-equal-erfüllbar ist, wenn ϕ (SAT-)erfüllbar ist.

Jede Klausel $C_i = (x \vee y \vee z)$ aus ϕ wird in ϕ' durch die folgenden drei Klauseln ersetzt:

$$\begin{aligned}x \vee y \vee a_i \\ \neg a_i \vee z \vee b_i \\ a_i \vee b_i \vee T\end{aligned}$$

Dabei steht T für eine globale Variable, die für die gesamte Formel nur einmal hinzugefügt wird.

Wir betrachten eine erfüllende Belegung von ϕ in den Variablen x, y und z . Als Belegung für ϕ' setzen wir $b_i = 1$ genau dann, wenn $z = 0$ ist. Die Variable T wird immer auf 1 gesetzt und a_i übernimmt den zu b_i komplementären Wahrheitswert *außer im Fall* $x = y = z = 1$, wo wir ebenfalls $a_i = 0$ setzen. In dieser Belegung gibt es immer mindestens ein wahres Literal

- in der ersten Klausel, da a_i nur auf 0 gesetzt wird, wenn die Klausel durch $x = y = z = 1$ ohnehin erfüllt wird oder $z = 0$ ist und somit x oder y wahr sein müssen.
- in der zweiten Klausel, da b_i nur auf 0 gesetzt wird, wenn z die Klausel erfüllt
- in der dritten Klausel, da T immer auf 1 gesetzt wird

Außerdem gibt es in der Belegung immer mindestens ein falsches Literal

- in der ersten Klausel, da a_i auf 0 gesetzt wird, wenn $x = y = 1$ ist (unabhängig von z)

- in der zweiten Klausel, da b_i auf 0 gesetzt wird, wenn z die Klausel erfüllt
- in der dritten Klausel, da a_i immer das Komplement zu b_i ist außer im Fall, wo b_i ohnehin auf 0 gesetzt ist.

Zum Zeigen der Umkehrrichtung gehen wir von einer NAE-erfüllenden Belegung für ϕ' mit $T = 1$ aus. Haben wir eine mit $T = 0$ können wir alle Wahrheitswerte einfach invertieren und erhalten eine NAE-erfüllende Belegung mit $T = 1$.

Für diese NAE-erfüllende Belegung gilt, daß in jeder Klausel mindestens eine von den beiden Zusatzvariablen a_i oder b_i auf 0 gesetzt ist (da $T = 1$ ist). Falls $a_i = 0$ ist, müssen x oder y wahr sein, bei $a_i = 1$ und $b_i = 0$ muss aber z erfüllt sein. Somit haben wir eine erfüllende Belegung für die ursprüngliche Formel ϕ vorliegen.

2. Zeigen Sie nun, daß NOT-ALL-EQUAL-SAT auch dann noch NP-vollständig ist, wenn in den einzelnen Klauseln nur positive Literale (also keine negierten Variablen) verwendet werden dürfen.

Lösungsvorschlag

Wird eine Variable x in einer Klausel als negatives Literal $\neg x$ genutzt, können wir das negierte Auftauchen einfach durch das positive Literal x' ersetzen und die Klausel $x \vee x' \vee x'$ hinzufügen. In einer NAE-erfüllenden Belegung nimmt x' immer einen zu x komplementären Wert an.

Aufgabe T25

Das Problem INDUCED CYCLES fragt, ob in einem gegebenen Graphen G mindestens k Knotendisjunkte Kreise existieren, die zudem noch unabhängig sind—d.h. diese Kreise sollen nicht durch Kanten untereinander verbunden sein. Beweisen Sie, daß dieses Problem NP-schwer ist, indem sie eine Reduktion von INDUCED MATCHING angeben (dessen schwere sollen Sie in H27 beweisen).

Aufgabe H27 (15 Punkte)

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ ist ein *Matching* in einem Graphen $G = (V, E)$, wenn für alle Kanten $e_1, e_2 \in M$ gilt, daß $e_1 \cap e_2 = \emptyset$. Ein Matching ist zudem ein *induced Matching*, wenn die Matchingkanten untereinander nicht durch Kanten in G verbunden sind.

Das Problem INDUCED MATCHING besteht nun darin, zu entscheiden ob ein induced Matching der Größe k in einem gegebenen Graphen G existiert. Dieses Problem wird in der Literatur auch als *risk-free marriage problem* bezeichnet: gesucht ist eine Zuteilung auf Ehen, so daß keiner der Ehepartner Interesse an einem Ehepartner einer anderen Ehe hat. Zeigen Sie, daß $\text{INDEPENDENT SET} \leq_p \text{INDUCED MATCHING}$.

Lösungsvorschlag

Gegeben sei eine Instanz (G, k) von INDEPENDENT SET. Wir reduzieren diese wie folgt auf eine Instanz (G', k) von INDUCED MATCHING: wir konstruieren G' aus G , indem wir an jeden Knoten x von G einen einzelnen neuen Knoten x' anhängen. Wir nennen so einen Knoten x' fortan den *privaten* Knoten von x und bezeichnen die Menge aller privaten Knoten mit P .

Wir beweisen die Korrektheit dieser Reduktion wie üblich in zwei Schritten.

“ \Rightarrow ” Jedes independent set $X \subseteq V(G)$ kann leicht in ein induced Matching $F \subseteq E(G)$ gleicher Größe überführt werden: konstruiere $F := \{xx' \mid x \in X\}$, wobei x' wie oben den zu x gehörigen privaten Knoten bezeichne. Da X unabhängig ist, ist F ein induced matching.

“ \Leftarrow ” Jedes induced Matching $F \subseteq E(G')$ kann in ein independent set $X \subseteq V(G)$ überführt werden. Dazu beweisen wir zunächst, daß jedes induced Matching F in ein gleich großes induced matching $F' \subseteq V(G) \times P$ transformiert werden kann. Sei $xy \in F$ eine Kante, deren Endpunkte beide in $V(G)$ enthalten sind. Es folgt, daß x', y' in keiner Matchingkante in F vorkommen können— daher können wir xy gegen xx' austauschen und erhalten wieder ein induced Matching. Wiederholen wir diesen Prozess erschöpfend, so bleibt ein induced Matching F' mit der obigen Eigenschaft.

Solch ein induced Matching $F' \subseteq V(G) \times P$ induziert aber sofort eine independent set $X \subseteq V(G)$: wir nehmen schlicht alle Knoten in $V(G)$, von von Kanten in F' berührt werden.

Aufgabe H28 (5 Punkte)

Ein *Hamiltonpfad* eines Graphen ist ein Pfad, der alle Knoten des Graphens genau einmal besucht. Das HAMILTIONPFAD-PROBLEM (HPP) besteht darin, einen solchen Pfad für einen gegebenen Graphen zu finden.

Analog ist beim 1/2-HAMILTIONPFAD-PROBLEM (1/2-HPP) ein Pfad gesucht, der genau die Hälfte der Knoten besucht. Zeigen Sie folgende Beziehung zwischen den beiden Problemen:

$$\text{HPP} \leq_p \text{1/2-HPP}$$

Lösungsvorschlag

Graph einmal kopieren.