RWTH Aachen **WS 2012/13**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Übungsblatt 4
Reidl–Ries–Rossmanith–Sanchez–Tönnis 5.11.2012

Übung zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabe T8

Betrachten Sie die Sprache $L_{Eigen} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert das Wort } \langle M \rangle \}$. Wiederholen Sie zunächst den Beweis aus der Globalübung, der zeigt, daß L_{Eigen} nicht rekursiv ist. Dieser Beweis benutzte nicht den Satz von Rice — beweisen Sie, daß der Satz von Rice überhaupt nicht auf L_{Eigen} anwendbar ist. Zeigen Sie anschließend, daß L_{Eigen} rekursiv aufzählbar ist.

Lösungsvorschlag

Betrachten wir $\bar{L}_{Eigen} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert das Wort } \langle M \rangle \text{ nicht}\}$. Nehmen wir an, $\bar{L}_{Eigen}$ wäre berechenbar, es existiert also eine TM $M_{\bar{L}_{Eigen}}$, welche $\bar{L}_{Eigen}$ entscheidet. Versuchen wir festzustellen, ob die Gödelnummer von $M_{\bar{L}_{Eigen}}$ in $\bar{L}_{Eigen}$ enthalten ist. Einerseits erhalten wir aus der Definition der Sprache, daß

$$\langle M_{\bar{L}_{Eigen}} \rangle \in \bar{L}_{Eigen} \Leftrightarrow M_{\bar{L}_{Eigen}} \text{ akzeptiert das Word } \langle M_{\bar{L}_{Eigen}} \rangle \text{ nicht}$$

Andererseits entscheidet $M_{\bar{L}_{Eigen}}$ die Sprache $\bar{L}_{Eigen}$, und damit gälte, daß

$$\langle M_{\bar{L}_{Eigen}} \rangle \in \bar{L}_{Eigen} \Leftrightarrow M_{\bar{L}_{Eigen}} \text{ akzeptiert das Word } \langle M_{\bar{L}_{Eigen}} \rangle$$

im Widerspruch zur obigen Feststellung. Damit kann $\bar{L}_{Eigen}$ nicht rekursiv sein und somit folgt, daß auch L_{Eigen} nicht rekursiv ist.

Zeigen wir nun, daß der Satz von Rice hier nicht anwendbar ist.

Wenn wir mithilfe des Satzes von Rice beweisen wollen, daß eine Sprache L nicht rekursiv ist, müssen wir eine Menge von partiellen Funktionen S finden, so daß $L = L(S)$ gilt. Das ist hier aber nicht möglich: Es seien M_1 und M_2 zwei Turingmaschinen, welche beide die Sprache

$$\{ \langle M \rangle \mid M \text{ hat weniger als 100 Zustände} \}$$

erkennen. Dabei soll M_1 weniger und M_2 mehr als 100 Zustände besitzen. Es ist klar, daß es solche Turingmaschinen gibt und beide dieselbe partielle Funktion f berechnen. Wenn $L = L(S)$ ist, dann müssen sowohl M_1 als auch M_2 zu L gehören (wenn $f \in S$) oder beide nicht zu L gehören (wenn $f \notin S$). Wir wissen aber leider, daß $M_1 \in L$ und $M_2 \notin L$.

Aufgabe T9

Es sei

$$L_{Platz} = \{ \langle M \rangle \mid \text{ es existiert } w \in \{0,1\}^*, \text{ so daß } M \text{ auf } w \text{ mehr als } |w| \text{ Platz benötigt} \}.$$

Beweisen Sie, daß L_{Platz} nicht berechenbar ist.

Lösungsvorschlag

Nehmen wir an, daß L_{Platz} berechenbar wäre, es also eine TM $M_{L_{Platz}}$ gibt, die L_{Platz} entscheidet. Wir benutzen $M_{L_{Platz}}$ als Unterprogram, um H_ϵ zu entscheiden. Dazu konstruieren wir eine TM M_{H_ϵ}, die zunächst einen Syntaxcheck der Eingabe durchführt und verwirft, wenn es sicht nicht um eine gültige Gödelnummer $\langle M \rangle$ handelt. Anschließend konstruiert sie eine TM M', welche wie folgt arbeitet: bei einer Eingabe w simuliert M' genau $|w|$ Schritte der Maschine M mit dem leeren Wort als Eingabe—durch eine Vergrößerung des Bandalphabets können wir eine eigene Spur als Arbeitsband von M reservieren. Sollte außerdem M versuchen, in Zellen links der Eingabe zu arbeiten, so verschieben wir den Bandinhalt von M nach rechts. Nach den $|w|$ Schritten sind auf dem Band von M' also auf keinen Fall mehr als $|w|$ Speicherzellen beschrieben. Sollte M innerhalb der simulierten $|w|$ Schritte halten, so beschreiben wir das mehr als $|w|$ Zellen des Bandes von M'.
Wir behaupten, daß $M_{L_{Platz}}$ die Eingabe $\langle M' \rangle$ genau dann akzeptiert, wenn M auf dem leeren Wort hält. TODO

Aufgabe H9 (15 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie, daß die folgenden Sprachen entscheidbar sind.

1. $L_{q_0} = \{ \langle M \rangle \mid \text{auf keiner Eingabe verläßt } M \text{ ihren Startzustand} \}$

   Lösungsvorschlag

   Die Sprache ist entscheidbar. Gibt es einen Übergang der Form $(q_0, *) \rightarrow (q_i, x \in \Gamma, *)$, dann ist $\langle M \rangle$ nicht in L_{q_0}, da es eine Eingabe gibt die mit mit dem Symbol x beginnt und damit verlässt M auf dieser Eingabe den Zustand q_0 schon im ersten Schritt.

2. $L_{Quadrat} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ berechnet die Funktion } n \mapsto n^2 \}$

   Lösungsvorschlag

   Die Sprache ist nach dem Satz von Rice unendscheidbar.

3. $L_{q_3} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ besucht auf jeder Eingabe Zustand } q_3 \}$

   Hinweis: Die Zustände von M sind aufsteigend durchnumeriert. Jede Turingmaschine mit drei oder mehr Zustände besitzt also auch einen Zustand q_3.

   Lösungsvorschlag

   Die Sprache ist nicht entscheidbar. Zum Beweis kann z.B. Unterprogrammtechnik verwendet werden. Dabei reicht es aus $\langle M \rangle$ so zu $\langle M' \rangle$ umzuformen, dass in M' alle Übergänge aus q_3 in den Endzustand $\overline{q}$ führen. Außerdem werden alle Übergänge die in M nach $\overline{q}$ gehen so geändert, dass sie in eine Endlosschleife führen.
   Nun terminiert M' genau dann wenn M den Zustand q_3 besucht. Folglich könnte mit einer TM die L_{q_3} entscheidet das allgemeine Halteproblem entschieden werden.

4. $L_{1/\sqrt{2}} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\left| \{ w \mid n = |w|,\ M \text{ akzeptiert } w \} \right|}{\left| \{ w \mid n = |w| \} \right|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

Lösungsvorschlag Wir zeigen mit Hilfe des Satzes von Rice, daß $L_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ nicht entscheidbar ist. Dazu betrachten wir die Menge von Funktionen $S = \{f \in \mathcal{R} \mid \lim_{n\to\infty} \frac{|\{w \mid n=|w|, f(w)=1\}|}{|\{w \mid n=|w|\}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Offentsichtlich ist $L_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = L(S)$. Um den Satz von Rice anzuwenden, müssen wir lediglich zeigen, dass $\emptyset \neq S \neq \mathcal{R}$. Die Funktion, die auf jedem Wort eins ist, ist offensichtlich nicht in S enthalten, trivial jedoch in $\mathcal{R}$.

Für den Fall $S \neq \emptyset$ konstruieren wir nun eine Turingmaschine M, die ein Funktion $f_M \in S$ berechnet. Unsere Maschine M akzeptiert schlicht alle Wörter der Form $w = 1^l 0^{|w|-l}$ mit $l = \lfloor \frac{2^{|w|}}{\sqrt{2}} \rfloor$. Somit ist $f_M \in S$ und damit $S \neq \emptyset$. Durch Anwendung des Satzes von Rice folgt damit die Unentscheidbarkeit von $L_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Zum Zeigen der Entscheidbarkeit skizzieren Sie eine Turingmaschine, die die Sprache entscheidet, oder beschreiben Sie ein formales Entscheidungsverfahren. Um Unentscheidbarkeit zu zeigen, nutzen Sie die Unterprogrammtechnik oder den Satz von Rice aus der Vorlesung.

Alle Turingmaschinen, die eine Gödelnummer besitzen, verwenden das Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und das Bandalphabet $\Gamma = \{0, 1, B\}$. Ihre Zustände sind $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$.