RWTH Aachen **WS 2012/13**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Übungsblatt 1
Reidl–Ries–Rossmanith–Sanchez–Tönnis 15.10.2012

Übung zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabe T1

Entwerfen Sie eine Turingmaschine, welche genau die Palindrome über dem Alphabet $\{0, 1\}$ akzeptiert.

Lösungsvorschlag

Es wird jeweils das am linken Rand der Eingabe mit dem am rechten Rand der Eingabe stehenden Symbol verglichen.

Wenn nur ein Band zur Verfügung steht, muss die Turingmaschine für diesen Vergleich einmal über die komplette Eingabe laufen.

1. Falls Eingabe leer, terminiere mit JA.
2. Speichere das aktuell gelesene Symbol im Zustand, und ersetze es durch ein B.
3. Laufe zum rechten Ende der Eingabe, und vergleiche das dort gespeicherte mit dem im Zustand gespeicherten Symbol. Falls ungleich, terminiere mit NEIN. Ansonsten lösche es auf dem Band.
4. Laufe ganz nach links, und gehe zu Schritt 1.

Daraus folgt eine Laufzeit von $\theta(n^2)$ für obigen Algorithmus. Gleiches gilt für die Optimierung, in der beim Zurücklaufen in Schritt 4 gleichzeitig auch ein Symbol vom rechten Rand im Zustand mitgenommen wird, um so bei jedem Lauf über die Eingabe zwei Zeichen miteinander vergleichen zu können.

Aufgabe T2

Zeigen Sie, daß jede 1-Band TM durch eine 1-Band TM mit einseitig unendlichem Band, d.h. durch eine Turingmaschine, die die Positionen $p < 0$ nie benutzt, simuliert werden kann. Wie groß ist der Zeitverlust?

Lösungsvorschlag

Wir simulieren eine 1-Band-TM mit beidseitig unendlichem Band auf einer 1-Band-TM mit einseitig unendlichem Band. Dazu benutzen wir eine zweite Spur. Zugriffe auf Bandpositionen $p \leq 0$ werden auf Position $1 - p$ umgelenkt. An Position 0 steht ein Sonderzeichen, das sonst nicht verwendet wird, z.B. ein \$. Die Beschreibung der Zustandsübergangsfunktion wird dabei doppelt so groß, sie enthält nämlich einmal das ursprüngliche und unveränderte δ, und einmal ein gespiegeltes δ'.

Falls der Kopf auf einer Position $p > 0$ steht, wird Spur 2 ignoriert. Falls Position 0 erreicht ist, was am \$ zu erkennen ist, findet ein Übergang statt, und es wird zum gespiegelten δ'

gewechselt. δ' benutzt Spur 2, und ignoriert Spur 1. Wo δ einen Schritt nach links macht, geht δ' nach rechts, und umgekehrt. Ansonsten bleibt die Berechnung wie bei der TM mit beidseitig unendlichem Band.

Diese Simulation verändert die Laufzeit nicht.

Aufgabe T3

Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten durch einen Pfad erreichbar ist. Die Sprache $L_{\text{connected}}$ enthalte alle Kodierungen aller zusammenhängenden Graphen.

Geben Sie eine formale Darstellung für $L_{\text{connected}}$ an. Machen Sie sich dabei insbesondere Gedanken zur Kodierung der Eingabe, zur Eingabelänge und zum Eingabealphabet.

Lösungsvorschlag

Wir kodieren G durch eine Adjazenmatrix $A = (a_{i,j}) \in \{0,1\}^{n \times n}$. Für alle Knotenpaare gibt es ein $k \in \{2, \ldots, n\}$, so dass ein Weg der Länge k zwischen diesen beiden Knoten existiert.

Sei $A = (a_{ij}) \in \{0,1\}^{n \times n}$ die Adjazenzmatrix zu G, d.h. $a_{ij} = 1$ genau dann, wenn $\{i, j\} \in E$ ist, für $0 \leq i, j < n$. Die Kodierung von G besteht aus der Aneinanderreihung der Zeilen von A, also aus dem Wort

$$a_{0,0}a_{0,1} \ldots a_{0,n-1}a_{1,0} \ldots a_{1,n-1} \ldots \ldots a_{n-1,n-1} \in \{0,1\}^{n^2}.$$

$$\begin{aligned} L_{\text{connected}} = \{a_{1,1} \ldots a_{n,n} \in \{0,1\}^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}, (\forall i, j \text{ mit } i \neq j)\ (\exists k \geq 2)\ (\exists \sigma \in S_n) : \\ \sigma(1) = i \text{ und } \sigma(k) = j \text{ und } \forall 1 \leq l \leq k-1 : a_{\sigma(l),\sigma(l+1)} = 1\} \end{aligned}$$

Aufgabe H1 (10 Punkte)

Geben Sie eine Beschreibung des Verhaltens der folgenden Turingmaschiner M. Hält M auf allen Eingaben? Falls ja, welche Sprache wird von M entschieden?

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \bar{q}\}, \{0,1\}, \{0,1,B\}, B, q_0, \bar{q}, \delta)$$

δ	0	1	B
q_0	(q_0, B, R)	(q_1, B, R)	(q_3, B, R)
q_1	(q_2, B, R)	(q_1, B, R)	(q_3, B, R)
q_2	(q_0, B, R)	(q_4, B, R)	(q_3, B, R)
q_3	(q_3, B, R)	(q_3, B, R)	$(\bar{q}, 0, N)$
q_4	(q_4, B, R)	(q_4, B, R)	$(\bar{q}, 1, N)$

Lösungsvorschlag

Die Turingmaschine M durchläuft im Anfangszustand q_0 beginnend die Eingabe von links nach rechts. Falls in einem der Zustände q_0 bis q_2 ein Blank gelesen wird, geht M in den Zustand q_3.

Sobald eine Eins gelesen wird, wechselt M in den Zustand q_1. Solange weiter Einsen gelesen werden, bleibt M im Zustand q_1. Ist das nächste Zeichen eine Null, geht M in den Zustand q_2. Folgt nun eine Null, geht M zurück in den Zustand q_0; falls eine Eins gelesen wird, geht M in den Zustand q_4.

In den Zuständen q_3 und q_4 entfernt M die restlichen Zeichen vom Band, schreibt eine Null bzw. Eins auf das Band und geht in den Endzustand $\bar{q}$.

Aufgabe H2 (10 Punkte)

Beschreiben Sie formal eine Turingmaschine, die die Sprache $\{\, q \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1 \,\}$ entscheidet.